La revista Epsilon está reseñada en:
IN-RECS, Dialnet y Base de Datos del Centro de Documentación Thales.

epsilon 77

Revista de Educación Matemática

Director
Alexander Maz

Comité Editor
Damián Aranda
Rafael Bracho
José Mª Chacón
Francisco España
José Galo
Manuel Gómez
Inmaculada Serrano

Comité Científico
Evelio Bedoya,
Universidad del Valle, Colombia.
Matías Camacho,
Universidad de la Laguna, España.
José Carrillo,
Universidad de Huelva, España.
Mª Mar Moreno,
Universidad de Lleida, España.
José Ortiz,
Universidad de Carabobo, Venezuela.
Modesto Sierra,
Universidad de Salamanca, España.
Liliana Mabel Tauber,
Universidad Nacional del Litoral, Argentina.

Página de la revista: http://thales.cica.es/epsilon
Revista: epsilon@thales.cica.es

Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"

Edita
Sociedad Andaluza de
Educación Matemática "Thales"
Centro Documentación "Thales"
Universidad de Cádiz
C.A.S.E.M.
11510 PUERTO REAL (Cádiz)

Maquetación e impresión
Grafitrés, S.L.
Cristóbal Colón, 12
41710 Utrera (Sevilla)

Depósito Legal
SE-421-1984

I.S.S.N.
1131-9321

Período
1er cuatrimestre 2011

Suscripción
ESPAÑA: 42,00 euros
PAÍSES DEL EURO: 63,00 euros
RESTO DE PAÍSES: 90 $ USA
(3 NÚMEROS AL AÑO)

S.A.E.M. THALES

Manuel Torralbo Rodríguez
Presidente

Rafael Bracho López
Vicepresidente

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Secretario General

Encarnación Amaro Parrado
Secretaria de Administración y Tesorería

SEDE

Facultad de Matemáticas
Edif. de la E.S.I. Informática. Ala L2
Avda. Reina Mercedes, s/n.
Aptdo. 1160
41080 SEVILLA
Tlfno. 954 62 36 58

SEDE ADMINISTRATIVA DE LA SOCIEDAD Y REVISTA

Centro de Documentación THALES
Universidad de Cádiz
CASEM. Campus del Río San Pedro
11510 - PUERTO REAL (Cádiz)
Tlf. y Fax: 956 01 60 50
Email: thales.matematicas@uca.es

ALMERÍA

Juan Guirado Granados
Delegado Provincial
IES Río Aguas. Sorbas.
04270 ALMERÍA

CÁDIZ

Paloma Pascual Albarrán
Delegada Provincial
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz
CASEM. Campus del Río San Pedro
Telf.: 956 016 050
11510 - PUERTO REAL (Cádiz)

CÓRDOBA

Manuel T. Castro Alberca
Delegado Provincial

GRANADA

María Peñas Troyano
Delegado Provincial
Aptdo. 673
18080 - GRANADA

HUELVA

Sixto Romero Sánchez
Delegado Provincial
Aptdo. 1209
21080 - HUELVA

JAÉN

Agustín Carrillo de Albornoz Torres
Delegado Provincial

MÁLAGA

Salvador Guerrero Hidalgo
Delegado Provincial
Tlfno.: 952 358 710
Fax: 952 334 092

SEVILLA

Ana Mª Martín Caraballo
Delegada Provincial
Tlfno.: 954 623 658
Sede: Facultad de Matemáticas
Apdo. 1160
41080 SEVILLA

ÍNDICE

7 **EDITORIAL**

INVESTIGACIÓN

9 **Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y Educación Matemática**
Bernardo Gómez (Univ de Valencia)

23 **Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la Educación Matemática**
Modesto Sierra Vázquez (Univ. de Salamanca)
Carmen López Esteban Lopez (Univ. de Salamanca)

39 **Orígenes y evolución del teorema de Rolle**
Carlos O. Suárez Alemán (Univ. de Cádiz)

51 **Historia y didáctica: el caso del escrito de L'Hospital *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes.***
Luis Augusto Campistrous (Univ Autónoma de Guerrero)
Jorge M. López Fernández (Univ de Puerto Rico, Río Piedras)
Celia Rizo Cabrera (Univ Autónoma de Guerrero)

65 **La creación de la Real Sociedad Matemática Española: una mirada a nuestra matemática de aquella época**
Javier Peralta (Univ Autónoma de Madrid)

83 **Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de l'Hôpital**
María Teresa González Astudillo (Univ de Salamanca)

99 **La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática**
Miguel Picado (Univ de Granada)
Luis Rico (Univ de Granada)

EXPERIENCIAS

113 **Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas**
Jesús Salinas-Herrera (Univ Nacional Autónoma de México)
Natividad Adamuz-Povedano (Univ de Córdoba)
Noelia Jiménez-Fanjul (Univ. de Córdoba)

IDEAS PARA EL AULA

127 **Thales de Mileto y la medición de las Piramides de Egipto**
Elisa Quirós Bajo (Alumna master profesorado UCO)

133 **Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en Secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase**
Constantino de la Fuente Martínez (I. E. S. Cardenal López de Mendoza)

RECENSIONES

153 **La rebelión de los números**
Mª Dolores Hidalgo

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

155 **Algunos hechos históricos en la resolución de problemas sobre el origen del cálculo integral**
F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

165 NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

EDITORIAL

Hace ya tres décadas que Freudhenthal (1981) planteaba las siguientes preguntas: ¿Debe un profesor de matemáticas saber algo sobre la Historia de las Matemáticas? y ¿Cuál puede ser el uso de la Historia de las Matemáticas? Desde entonces se ha investigado y planteado diversas respuestas a estos interrogantes. Es un hecho aceptado que es importante que los profesores de matemáticas conozcan el desarrollo de su disciplina porque entre otros aspectos, les permitirá comprender que algunos de los errores conceptuales en los que el alumnado suele incurrir son semejantes a los que destacados matemáticos del pasado tuvieron que dar solución para formalizar determinados conceptos.

En cuanto al uso de la Historia de Matemáticas, las propuestas son variadas y van desde la motivación, destacando aspectos humanísticos y como conocimiento cultural, la interdisciplinariedad y la organización curricular por mencionar algunas.

El tema sigue siendo de interés y actualidad, prueba de ello es la reciente realización en Portugal del I Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática en la Universidad de Beira Interior, con participación de más de 100 investigadores y una destacada presencia española en el mismo.

Debido a su importancia, diversas revistas de prestigio en el ámbito de la Educación Matemática le han dedicado números monográficos y puesto que la Historia de las Matemáticas es uno de los temas recurrentes en casi todas las revistas españolas de Educación Matemática, nuestra revista Epsilon publica en esta ocasión un número monográfico sobre esta temática, en el que tanto investigadores como profesores de instituto presentan diversos tratamientos y propuestas para trabajar con la Historia de las Matemáticas, ejemplo de ello son los dos artículos que tratan sobre el libro del marqués de L'Hôpital.

En este número se integran artículos de contenidos teóricos, metodológicos, educativos y divulgativos sobre la Historia de las Matemáticas tratando de abarcar un amplio espectro de ámbitos de interés para todos los lectores.

Finalmente quiero reiterar la invitación a los socios de la sociedad THALES, al colectivo investigador y docente para que nos envíen sus artículos para las diferentes secciones de la revista.

Alexander Maz Machado
Director

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Freudhenthal, H. (1981). Should a mathematics teacher know something about the history of mathematics. *For the learning of matehmatics*, 11(2), 13-6.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 9-22*

Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática

Bernardo Gómez
Departamento de Didáctica de la Matemática
Universidad de Valencia

Resumen: *Se presenta un trabajo que pretende brindar herramientas conceptuales para una contextualización de la investigación en Historia de las matemáticas y Educación matemática que se ha venido desarrollando en España.*

Palabras clave: *Historia de las matemáticas, Educación Matemática, investigación, España.*

HISTORIA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En el contexto de la actual investigación en didáctica de la matemática ha surgido en los últimos años una línea de investigación denominada "historia y educación matemática", que cuenta con su propio espacio como uno de los grupos con que se organiza la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Esta línea toma a los libros de texto que han sido influyentes a lo largo de la historia de las ideas matemáticas como fuente principal de información y tiene como corriente más destacada la que utiliza el análisis de las concepciones epistemológicas como elemento central de la indagación.

En la mayoría del trabajo realizado, este análisis, se ha orientado a dos líneas de provecho para la didáctica de la matemática, una es la de identificar las bases del diseño curricular y la otra la de identificar las raíces o rastros de los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

La investigación en Historia y Educación Matemática y el paradigma cognitivo

Hace mas de 30 años, Freudenthal (1980) decía que el problema principal, el más urgente para la investigación en Educación Matemática, es el que se formula con la pregunta: "¿Por qué Juanito o María no sabe matemáticas? O, por qué hay tantos niños que no saben las matemáticas se espera que sepan". Una manera de

responder, decía, podría ser: "observando procesos de aprendizaje, analizándolos y documentado paradigmas". Desde entonces una gran parte del esfuerzo investigador de las últimas décadas se ha orientado la observación de los procesos de aprendizaje de los estudiantes, permitiendo identificar y caracterizar las concepciones que los estudiantes construyen a medida que avanzan en el estudio de las matemáticas.

Pero al estudiar los procesos de aprendizaje se ha descuidado una faceta importante, el más grande de los procesos de aprendizaje, el de la humanidad, que también es un aprendiz (Freudenthal, 1980, p. 137). Para observar su proceso de aprendizaje no hay más remedio que regresar a la historia para estudiar la evolución de las ideas matemáticas, analizando los textos históricos, como cogniciones epistemológicas, de la misma manera que analizamos las cogniciones de los estudiantes.

Concepción epistemológica

La expresión concepción epistemológica, adquiere un sentido particular en Didáctica de la matemática que conviene explicar. Sin entrar en mayor profundización consideraremos que el apelativo epistemológico se aplica a los estudios interesados en abordar el estudio de la constitución y fundamento del conocimiento científico. La epistemología utiliza diversos métodos para reflexionar sobre su objeto de estudio: uno de ellos es el método *histórico-crítico* que trata de la reconstitución de la historia de la ciencia en tanto análisis de los procesos que han seguido los conceptos matemáticos en su formación y en su desarrollo.

En cuanto al término concepción, existe un problema con el vocabulario, ya que en Didáctica de las matemáticas se aplica en dos sentidos complementarios: el punto de vista del sujeto y el punto de vista epistemológico. El término concepción referido al sujeto se usa para referirse a un estado cognitivo global del mismo, mientras que referido a la epistemología se usa ligado un estado cognitivo dominante en la comunidad científica de un cierto período histórico, normalmente circunscrito a los libros de texto, programas, cuestionarios, o curricula de enseñanza.

En este sentido, las concepciones epistemológicas se pueden entender como las concepciones destiladas en los libros de texto, lo que en la terminología de Puig (2006) son las cogniciones petrificadas. Él explica el término cogniciones petrificadas de la siguiente manera: "Petrificadas porque están ahí, en el texto que nos ha legado la historia, como en los monumentos de piedra de los que no cabe esperar que digan más de lo que ya está en ellos. Cogniciones porque lo que queremos leer en esos textos no es el despliegue de un saber, las matemáticas, sino el producto de las cogniciones (matemáticas) de quien se declara como su autor" (Freudenthal, 1980, p.113).

Necesidad de un marco de referencia

Una de las tareas perentorias para rastrear las concepciones epistemológicas dominantes en la historia de las ideas matemáticas en España es disponer de una

buena catalogación y compilación de los libros de texto que las recogen. Aunque esta es una tarea pendiente, ya existen algunas aportaciones, recogidas en la literatura afín, que, aunque incompletas, logran acercarse a este propósito como piezas que van configurando un todo.

Ahora bien, una compilación "a secas" de libros históricos, por exhaustiva que sea, no resuelve el problema principal, que es el de disponer de criterios para elegir cuáles son los libros verdaderamente relevantes para el estudio que se desea emprender, dentro de su contexto y de las corrientes epistemológicas y didácticas dominantes. Para ello, para determinar cuáles son estos libros, es necesario disponer de un marco de referencia. Un marco que aporte criterios sólidos para agrupar los libros en torno a características comunes y seleccionar aquellos que son más representativos o valiosos para el propósito de la investigación que se persigue en historia y educación matemática. Es decir, un marco que ha de ser útil para dirigir y focalizar la investigación, separando el grano de la paja.

Criterios para determinar un marco de referencia

Los trabajos pioneros de Gómez (1995), Sierra, González y López (1999), y el más reciente de Maz (2005), han aportado criterios para agrupar la producción de libros de texto de matemáticas españoles que se han sucedido a lo largo de la historia en función de hechos históricos decisivos e influyentes en la época en que surgen. Estos trabajos han sido útiles para el objetivo de los trabajos planteados por esos autores, y sirven como referencia para nuevos trabajos, pero son incompletos porque solo abordan una parte del problema que nos ocupa, ya que solo se refieren a un periodo limitado de la historia o a una rama específica.

1. Así, por ejemplo, Gómez (1995), se fija en los cambios producidos en la difusión y configuración de los libros de texto de aritmética y considera dos grandes puntos de inflexión: uno es la aparición de la imprenta a finales del siglo XV y otro es cuando se establece el sistema general y público de enseñanza de corte estatal y centralista, al finalizar la revolución francesa (1789).

El primero, porque al permitir multiplicar el número de ejemplares de cada obra, produjo una gran expansión y difusión de los conocimientos con una potencia desconocida hasta el momento; y el segundo porque es el momento en que se da el golpe de timón para por primera vez establecer un curriculum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo que hizo preciso la producción de un tipo de libro adaptado a las necesidades del nuevo sistema de enseñanza. Estos libros se caracterizaron por un espíritu elementalizador, lo que se entendió como la exposición de lo más sustancial, es decir, de los elementos básicos del conocimiento (compendio), puestos en el mejor orden (metódico), de la manera más simple (breve) y del modo más claro (fácil) para "hacer enseñable" ese conocimiento. Aunque esta connotación del término elemental llegará a pervertirse más adelante, pasando a considerarse como texto abreviado o texto que condensa uno voluminoso en otro más corto a base de recortarlo y de prescindir de rigor y coherencia, lo cierto es que supuso una selección y organización del

saber que se plasmó en una propuesta de enseñanza para los niños en la que se incluía la aritmética y se establecía que había que enseñarles a contar y las primeras reglas (Sierra, Rico y Gómez, 1997)

2. Maz (2005) se fija en los cambios político-sociales para seleccionar y agrupar los textos de matemáticas en España en un periodo determinado por los siglos XVIII y XIX. Establece cuatro sub-periodos que son el *Jesuita* (1700-1767) que coincide con la dinastía de los Borbones hasta la expulsión de los jesuitas; el de la *Ilustración*, desde Carlos III a la restauración de Fernando VII (1768-1814); el *Romántico*, desde la restauración de Fernando VII hasta la Primera República (1814-1875); y el de la *Restauración*, desde el fin del sexenio democrático hasta el inicio del siglo XX (1875-1900). En general establece criterios socio-culturales para tener en cuenta al realizar la investigación histórica en Educación Matemática.

3. Finalmente, Sierra et al. (1999) se fijan en las disposiciones legales sobre el currículo, dado que los libros de texto tienen que adaptarse a ellas, para agrupar los libros de texto del periodo determinado por la segunda mitad del siglo XX. Establece tres sub-periodos que en líneas generales corresponden a los sucesivos planes de estudio aparecidos desde el final de la guerra civil. Estos sub-periodos son: un primer periodo comprendido entre 1940 y 1967, que abarca desde la guerra civil hasta la publicación de los textos piloto para la introducción de la matemática moderna en el Bachillerato, aunque considera un punto de inflexión en 1953, año en el que se publica un nuevo plan de estudios (modificado parcialmente en 1957). Un segundo periodo comprendido entre 1967 y 1975, que abarca desde la introducción de la matemática moderna hasta la implantación del Bachillerato Unificado y Polivalente (B.U.P.). Y, finalmente, un tercer periodo, que abarca desde la implantación del B.U.P. hasta los nuevos bachilleratos derivados de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.).

1. Periodos principales

En cierto modo los criterios descritos son complementarios y se pueden combinar de modo que la determinación de los periodos fundamentales en que se divide la producción española de libros de texto se puede hacer más fina, ajustado los periodos y sub-periodos.

Así, tomando como criterio inicial, los puntos de inflexión fundamentales en la producción y difusión de los libros de texto, se pueden determinar grandes periodos históricos en la evolución y transmisión de la cultura y educación matemática española. Estos periodos se pueden subdividir a su vez con ayuda de los otros dos criterios señalados antes: los cambios político-sociales y los sucesivos planes de estudio.

1.1. El primer punto de inflexión relevante en la península Ibérica, en relación con la producción y difusión de los libros de texto, es seguramente el que comienza con la caída del imperio romano. Este hecho histórico da paso a la cultura visigótica y a continuación a una época de asimilación de las fuentes islámicas y recuperación de las obras griegas, en lo que se conoce como “las traducciones”.

1.2. El siguiente gran punto de inflexión es la aparición de la imprenta, que dio lugar a la publicación y divulgación de los primeros textos en lenguas vernáculas nacionales, que son, fundamentalmente, aritméticas comerciales, debido al paso de la economía natural a la monetaria.

1.3. Un tercer punto de inflexión es el paso del libro impreso al libro de enseñanza, que son libros escritos para dar respuesta a las exigencias del sistema educativo, nacional, general y centralizado. Estos libros alcanzaron una popularización sin precedentes y pronto fueron objeto de regulación estatal al establecerse concursos nacionales para su selección[1].

1.4. El cuarto gran punto de inflexión es el paso del libro de enseñanza al manual escolar, que es el libro adaptado a las necesidades de la escuela graduada: un modelo de instrucción dividido en grados conforme a la edad y condiciones intelectuales de los niños. Son libros que, a falta de una adecuada regulación de los contenidos, adquirieron una gran relevancia y se convirtieron en verdaderos programas fácticos para los docentes, y un modelo para organizar y planificar la actividad escolar.

Estos puntos de inflexión determinan cinco grandes periodos históricos que son los siguientes:

- Primitivo: desde las primeras culturas matemáticas hasta la caída del imperio romano en el año 476.
- De obscurantismo occidental: desde la caída del imperio romano hasta el nacimiento de la imprenta, al final del s. XV.
- Del libro impreso: desde el nacimiento de la imprenta hasta los inicios del sistema de instrucción pública, de corte estatal, general y centralista, que arranca tras la revolución francesa (siglos XVI-XVIII).
- Del libro de enseñanza: desde los inicios del sistema de instrucción estatal hasta la implantación general de la escuela graduada (s. XIX).
- Del manual escolar: desde la implantación de la escuela graduada hasta la actualidad.

2. Sub-periodos

Fijando la atención en los cambios político-sociales y los cambios en los planes de estudio se pueden identificar otros puntos de inflexión que permiten subdividir los periodos en sub-periodos.

2.1. En el periodo primitivo se pueden tomar dos puntos de inflexión: uno es el paso de las culturas babilónica y Egipcia a la cultura de la Grecia del Peloponeso, de Tales y Pitágoras; y el otro es el paso de la cultura de la Grecia del Peloponeso

1. El primero de estos concursos se realizó en Francia a raíz del informe Arbogast (1792) y eligió a Condorcet: *Moyens d'aprendre a compter sûrement et avec facilité* (1799) para Primaria y a Lacroix: *Tratado elemental de Aritmética (1797*), para Secundaria

a la de la Grecia del Helenismo que corresponde a la escuela de Alejandría: Euclides (300 a.C.), Apolonio, Eratóstenes (225 a.C.), Arquímedes (212 a.C.), Hiparco (140 a.C.), Nicomaco (100 d.C.), Ptolomeo, Diofanto (250), Pappus (320).

Estos puntos de inflexión determinan tres sub-periodos que se pueden denominar precisamente primeras culturas matemáticas, cultura del Peloponeso y cultura Helenística.

2.2. En el periodo de obscurantismo medieval, destaca como punto de inflexión el arranque de la etapa de influencia árabe. Esto determina dos sub-periodos, uno que se puede denominar de los manuscritos, porque los pocos documentos que se conservan son manuscritos recopilados y conservados en los monasterios, están escritos en griego, latín y árabe y tienen escasa difusión en la cultura cristiana medieval; y otro, que se puede denominar el de la traducciones, porque se asiste a un proceso de transmisión y asimilación del saber científico árabe y griego en la Europa medieval a través de lo que se ha dado en llamar las traducciones" de los siglos XI al XIII.

2.3. En el periodo de libro impreso es importante el cambio que se produjo al implantarse las normas dictadas por el Concilio de Trento (1546) que estipulaban la enseñanza de la religión, el favorecer a las órdenes religiosas y el preservar a las universidades colocadas bajo la inspección de la iglesia del contacto con herejes. Este Concilio marcó el arranque de la etapa de influencia de las órdenes religiosas y en particular de los jesuitas. El siguiente momento importante es el de la expulsión de los jesuitas que dio paso al proceso de regeneración científica y académica promovida desde las instituciones civiles y militares a finales del s. XVIII.

Estos dos puntos de inflexión determinan tres sub-periodos.

2.3.1. El sub-periodo inicial, coincide con el apogeo en España del humanismo, que se mueve entre finales del siglo XV y mitad del siglo XVI. Son los años de la aparición de los primeros textos en lenguas vernáculas[2], que dieron respuesta a las necesidades del desarrollo económico, que entre otras cosas dio paso a la profesión del maestro calculista (Rechemeister). Estos maestros llevaban las cuentas de los asuntos municipales por encargo de los ayuntamientos y mantenían a menudo sus propias escuelas de cálculo, en las que se enseñaban los primeros pasos con los números y con su escritura, la suma, resta, multiplicación y división, las aplicaciones a los problemas de la vida cotidiana en la compra, el trueque y las transacciones monetarias. Muy a menudo los maestros calculistas ponían por escrito su material de enseñanza. Estos manuales de cálculo fueron característicos, junto con biblias, calendarios y panfletos políticos, de la primera época de la imprenta (Wussing. 1979).

España continuó contribuyendo a la difusión del conocimiento matemático en Europa, con la publicación de obras originales o de texto para la enseñanza en las universidades de Salamanca, Alcalá, incluso París. Especial relevancia tuvieron los

2. En 1482 aparece la primera aritmética publicada en España, la *Suma de la art de arismetica* de Frances Santcliment, apenas 4 años después del que se considera primer libro impreso, una aritmética en italiano anónima publicada en Treviso en 1478.

libros de aritmética[33], pero a pesar del relumbrón de sus autores, la matemática española estaba más en la línea de la medieval de Boecio, de los *calculatores* ingleses de finales del siglo XIV, y sobre todo de la matemática francesa – ya en declive- de finales del siglo XV, que de la renovadora matemática italiana (Peralta, 1999).

2.3.2. El siguiente sub-periodo es el de influencia de las órdenes religiosas: escolapia, lasaliana, y jesuítica, que tuvieron una gran importancia en el desarrollo educativo y donde las matemáticas tuvieron un papel relevante.

En estos años se reguló de forma restrictiva la venta de libros extranjeros y se prohibió estudiar fuera de las Universidades españolas, con el argumento de que esto supondría la quiebra de las mismas. Por otra parte, las Universidades se ven sometidas a un control férreo y se expurgan las bibliotecas, tanto públicas como privadas. Esta actuación, llevada a cabo por Felipe II, al frente de la Inquisición, trajo consecuencias lamentables para el desarrollo de la ciencia en España" (Hernández, et al., 1995, p. 7).

Desde su fundación, la Compañía de Jesús (1545) comenzó a acaparar las iniciativas fundacionales de centros educativos, ampliando el ámbito municipal y eclesiástico. Objetivo que se materializó en la institución de centros para los distintos tipos de aprendizaje. En estos se organizó la enseñanza de acuerdo con los criterios dictados por la *Ratio Studiorum,* (Ratio atque Institutio Studiorum Societatis Jesu, 1599) de Ignacio de Loyola, que es un reglamento interno de disciplina académica que contemplaba la distribución de todas las tareas académicas, desde las reglas que debían seguir el prefecto de los estudios y los profesores hasta las normas para los exámenes escritos o composiciones, las disciplinas, duración de los estudios e incluso los autores recomendados para las lecciones. Quedaba así, constituido un primitivo curriculum educativo, que se convirtió casi en regulador único de los distintos niveles académicos[4].

2.3.3. En el tercer sub-periodo se asiste al predominio de las instituciones civiles y militares, ya que se generaliza la opinión de que la formación de la juventud debía desvincularse de las instituciones que como la Iglesia en general y órdenes religiosas en particular la habían monopolizado hasta entonces (Peset, 1999).

Al expulsarse a los jesuitas (1767) se incrementa el fomento de las instituciones civiles que prepararon el resurgimiento de las matemáticas españolas, se crean o recuperan cátedras de matemáticas (en particular Valencia y Salamanca), para las cuales es necesario pasar exámenes (antes no)[5]. Se crean observatorios astronómi-

3. *Aritmetica teórica et práctica* (París, 1514) de Juan Martínez Silíceo, *Cursus quattuor mathematicarum artium liberalium* (1516) de Pedro S. Ciruelo, el *Tratado subtilíssimo de aritmética y geometría* (Sevilla, 1542) de Juan de Ortega y la *Arithmetica practica y especulativa* (Salamanca 1562) de Juan Pérez de Moya

4. Sus manuales más importantes fueron los textos de Ramus (1515-1572) y de Clavius (1537-1612).

5. En la Universidad de Valencia, destacaron dos seguidores del movimiento renovador de los denominados "novatores", que pretendían la introducción de la ciencia moderna y propusieron reformas sobre los libros y método de enseñanza: los matemáticos Juan Bautista Corachán (1661-1711 o 41): *Arithmetica demonstrada theorico-practica para lo mathematico y mercantil* (1699) y Vicente Tosca (1651-1723), en cuyo *Compendio Mathemático en que se contienen todas las materias mas principales de las ciencias que tratan de la cantidad*. (1707) se recoge el álgebra literal de Vieta. Según Hernández (1980, p. 56) este texto está copiado en lo fundamental de otro francés, el jesuita Deschalez.

cos y laboratorios de física y química. Se crean los jardines botánicos y bibliotecas universitarias, algunas de las cuales con fondos procedentes de las librerías jesuíticas. Se inicia en España un movimiento matemático en las instituciones militares, como la Academia de Guardias Marinas donde se fundó el observatorio astronómico o civiles como el Real Seminario de Nobles (1770) o los Estudios Reales de San Isidro, creados a partir del Colegio Imperial, la Academia de Bellas Artes de San Fernando y las Reales Sociedades de Amigos del País.

Instituciones militares y civiles requieren de profesores con grandes conocimientos matemáticos para asegurar la enseñanza. Estos profesores, pertenecen a la Sociedad civil son funcionarios eruditos y laicos, a diferencia del periodo anterior, esto responde en parte a las medidas tomadas por la corona para llenar el vacío docente originado por la expulsión jesuita y significa un paulatino desplazamiento de las órdenes religiosas del control educativo y científico español (Maz, 2005).

Al terminar este periodo parecía que España, con la colaboración de Francia, se incorporaba al movimiento científico internacional, destacando la incorporación de matemáticos, astrónomos y cartógrafos españoles a las mediciones del meridiano. También es de destacar la incorporación española a las reuniones de la Comisión internacional de pesas y medidas que dio lugar a la instauración del sistema métrico decimal.

2.4. En el periodo de los libros de enseñanza el gran punto de inflexión es la aparición de la primera gran Ley de Educación, la Ley Moyano en 1857, hasta 1970 no volvió haber otra ley. Esta ley reguló el sistema escolar español en cuanto a la estructura administrativa, escolar y de profesorado, casi sin cambios sustanciales. Este punto de inflexión determina dos sub-periodos.

2.4.1. El primer sub-periodo corresponde al desarrollo del informe Quintana (1813), promovido por las Cortes de Cádiz. Este informe sentó las bases del futuro sistema nacional de enseñanza español, dio lugar al Reglamento de Instrucción Pública de 1821 y al Primer Plan General de Instrucción Pública en 1836 (Plan del Duque de Rivas), que estableció la división del sistema educativo en primera, segunda y tercera enseñanza. La enseñanza primaria y secundaria con dos niveles: elemental y superior, la Secundaria impartida en Institutos elementales y Institutos superiores. En todos los niveles figuraban las matemáticas. También influyó en el plan Pidal (1845) que dividió la segunda enseñanza superior, llamada de ampliación, en Ciencias y Letras, y además, dictó disposiciones relativas a los libros que deben servir de texto[6].

El título obtenido al finalizar era de Bachiller en Filosofía y si se cursaba un complemento hecho en dos años por lo menos, el de Licenciado en Ciencias.

En esos años, el interés por el estudio de las matemáticas del más alto nivel todavía se situaba en las instituciones militares, ya que no eran las necesidades de reorganización y modernización de la sociedad lo que impulsaba su estudio, sino

6. En1851, se convoca un concurso de textos para Segunda enseñanza; para la enseñanza de las matemáticas fueron aprobados los siguientes: *Elementos de matemáticas* de Juan Cortázar, *Curso completo de matemáticas puras (1827)* de José de Odriozola y el *Tratado de matemáticas de Vallejo* (Rico, Maz, 2005, p. 27).

la necesidad de un ejército poderoso, cuya eficacia se creía lograr con la mejor formación de sus oficiales, la cual era la formación científica-técnica. El relumbrón de los autores franceses y la carencia de textos matemáticos españoles actualizados, trajo consigo la aparición de traducciones de los manuales de más éxito o más populares de las escuelas militares y técnicas francesas.

2.4.2. En el siguiente sub-periodo, la Ley Moyano (1857) estableció la educación obligatoria, los centros de formación de profesores y el modelo de carrera universitaria que habilita para el ejercicio profesional. Las universidades se adaptaron al modelo de centralista y uniforme de los estudios. Se crearon las Facultades de Ciencias, la primera a partir de la sección científica creada en la Facultad de Filosofía en 1845, con las ramas Físico-matemáticas, Químicas y Naturales. Más tarde en 1873, se diferencia a las facultades universitarias por su contenido específico. De la Facultad de Ciencias se originan tres nuevas titulaciones: Exactas, Física y Química e Historia Natural.

Estas facultades además de impartir los estudios preparatorios de Medicina, Farmacia e Ingenierías, formaban al profesorado de secundaria, ya que se impartían los tres cursos del grado de bachillerato en ciencias, que habilitaba para poder presentarse a oposiciones de catedrático de Instituto, que en el caso de las de matemáticas eran de Geometría y Aritmética, salvo la central, en Madrid, que se reservaba el grado de Doctor y era la encargada de formar los profesores de Universidad.

Este fenómeno de institucionalización que conectaba el grado, el título y la profesión docente, tenía poco que ver con la evolución de los contendidos científicos, de hecho, la investigación, la creación de ciencia no estaba considerada entre las funciones de las facultades de ciencias.

Gracias al reconocimiento de la libertad de expresión y la libertad de cátedra que se puso en marcha a partir del gobierno provisional de 1868 y la Constitución de 1869, arrancan unos años de recuperación del trabajo científico, que tuvo que superar algunas dificultades por la alternancia entre gobiernos conservadores y liberales, sobre todo durante los años de la Restauración (1875-1898).

Por ejemplo, el conflicto de intereses entre las facultades de ciencias y las escuelas de ingenieros. Para ingresar en las escuelas había que superar un examen para el que se necesitaba aprobar materias que correspondían a los primeros cursos de las facultades de Ciencias, esto producía un fenómeno de repetición de asignaturas que dio origen a una larga polémica sobre el papel de la ciencia, entre los catedráticos de ciencias y los ingenieros. Esta polémica se sustanció en contra de las facultades, reduciendo las secciones de ciencias; después, en el sexenio democrático, se suprimieron los estudios teóricos de algunas escuelas de ingenieros (cálculo infinitesimal y geometría descriptiva entre otros) y se dejaron únicamente los prácticos. Esto dio libertad a los aspirantes a estas carreras a cursar estos estudios en las universidades o con profesores particulares, lo que trajo como consecuencia, un tipo de publicación especializada, los libros de matemáticas para la preparación de los aspirantes a las Escuelas de ingenieros, verdaderos libros de texto dedicados a la enseñanza de las matemáticas cuyo objetivo no era poner la

ciencia actual al alcance de los estudiantes, sino el adiestramiento para un tipo de prueba específica: el examen de ingreso.

Otro conflicto se produjo con el acceso al poder de los conservadores en 1874, al ser exigido a los profesores de todos los grados que se atuvieran a la doctrina oficial y silenciaran sus críticas al catolicismo. Ese atentado contra la libertad de cátedra condujo a que numerosos docentes, forzados o voluntariamente, abandonaran sus puestos. Parece ser que este hecho sirvió para que algunos de los expulsados fundaran en 1876 la Institución Libre de Enseñanza, destinada a desempeñar una relevante tarea a favor de la Ciencia y la Cultura. La aceptación de la libertad de cátedra y el regreso de los catedráticos destituidos a la universidad española se produjo en 1881, cuando se inicia el periodo de gobierno de los liberales.

A lo largo de este sub-periodo, que prácticamente coincide con la segunda mitad del siglo XIX, se decretó la enseñanza obligatoria del sistema métrico decimal, que aunque inicialmente fue establecida por la Ley de julio de 1849, no es hasta 1860 cuando entra en vigor. Al asumir el sistema métrico decimal los libros de texto tuvieron que ser reelaborados, lo que condujo a una reestructuración de los programas, dando más importancia a los números decimales, y ganando en simplificación y brevedad como consecuencia de la pérdida de importancia de los tediosos capítulos dedicados a los diferentes sistemas de pesas y medidas y el cálculo con los números denominados correspondientes. Esto permitió disminuir el tiempo escolar dedicado a la aritmética ganándolo para otros contenidos matemáticos. A partir de este momento se produce una nueva expansión en la producción de libros de texto de aritmética que, con diversos subtítulos como "aplicada al nuevo sistema métrico", "puramente métrica", "con el nuevo sistema de pesas y medidas", etc., intentan atender las nuevas demandas curriculares (Sierra et al. 1997, p. 381).

Al finalizar este sub-periodo se romperá definitivamente el predominio de lo militar, cuando la figura del profesorado universitario irrumpe con fuerza en la producción de textos para la enseñanza en la matemática.

2.5. En el quinto y último periodo, el del libro escolar, los puntos de inflexión decisivos coinciden con los momentos de aparición de las reformas más importantes del sistema educativo español. Estas reformas vienen dadas por el Plan Romanones (1901), el Plan Ruiz Jiménez (1953), la Ley Villar Palasí de 1970, y, finalmente, las leyes de los años de normalidad democrática: LRU (1983), LOGSE (1990) y LOE (2006) principalmente.

Estos puntos de inflexión determinan cuatro sub-periodos que coinciden con los años del desarrollo y vigencia de los planes de estudio citados.

2.5.1. El primer sub-periodo corresponde con el periodo de influencia del plan Romanones (1901) que dio entrada a la escuela graduada, dividida en tres grados: párvulos, elemental y superior; y a un esbozo de los primeros cuestionarios oficiales.

2.5.2. El segundo sub-periodo es el del desarrollo del Plan Ruiz Jiménez (1953), con el que aparecen los primeros cuestionarios escolares detallados por materias.

Este plan reagrupaba los siete cursos de la segunda enseñanza en tres etapas: 10-14, Bachillerato elemental, 14-16 bachillerato superior con las especialidades de Ciencias y letras, 16-17, curso preuniversitario, también con las especialidades de ciencias y letras. Este plan sufrió modificaciones en 1957 y en 1963 que no produjeron cambios sustanciales.

Son los años centrales de la dictadura, donde las relaciones culturales y académicas con otros países están muy limitadas, la investigación matemática es incipiente, con la excepción de algunos trabajos realizados por unos pocos matemáticos en el exilio. Únicamente hay estudios superiores de matemáticas en tres Universidades (Madrid, Barcelona, Zaragoza).

2.5.3. El tercer sub-periodo corresponde a la segunda ley educativa española. La Ley Villar Palasí de 1970, con la que se dan pasos significativos para superar el retraso educativo. Esta ley tuvo en cuenta las directrices en política educativa que había en Europa en aquellos momentos y dio inicio en España al movimiento de reforma de las matemáticas modernas, incrementó el número de universidades con estudios superiores de matemáticas, estableció un nuevo modelo de formación de profesores que era concurrente y universitario para la Educación Primaria y consecutivo y de posgrado para la secundaria. También amplió la enseñanza primaria obligatoria al periodo 6-14, y organizó el Bachillerato en un programa de tres años. A finales de este periodo, la educación matemática comienza su andadura universitaria, como especialización de la comunidad de matemáticos, comienzan a aparecer trabajos pioneros en didáctica de la matemática y se hacen presentes los movimientos de renovación pedagógica.

2.5.4. El cuarto sub-periodo corresponde al ingreso de España en la Unión Europea (1986). No son solo años de despegue económico y de normalidad democrática española, sino de aparición de nuevas leyes que producen cambios sustanciales en todo el sistema educativo. Uno es la modernización de la universidad a raíz de la Ley de Reforma Universitaria de 1984 que establece la Autonomía universitaria y propicia el incremento del número de universidades y de las universidades con títulos de matemáticas (25 universidades cuentan con títulos de matemáticas). Otro cambio es la Extensión de la educación básica a toda la población y ampliación del periodo educación obligatoria por Ley de Organización del Sistema Educativo, 1990 (Primaria, 6-11 años y Secundaria, 12-16 años). La creación y despliegue de la red de Centros de Profesores

Especial mención merece la institucionalización de la Educación Matemática en la Universidad, al crearse los Departamentos de Didáctica de la Matemática e iniciarse los Programas de Doctorado homónimos, la creación de Sociedades de profesores de matemáticas y la aparición de revistas de Educación matemática.

En la coyuntura finisecular y entrada del nuevo milenio, destaca la Constitución de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM, 1996), la refundación de la Real Sociedad Matemática Española (RSME), la "National ICMI Sub-Commission" (1999), y el nacimiento del Comité Español de

Matemáticas (CEMAT, 2004) que representa a todas las Sociedades matemáticas nacionales y coordinó el I.C.M. 2006 celebrado en Madrid.

En estos últimos años aparecen nuevas leyes educativas para adaptarse a la Convergencia Europea: la Ley Orgánica de Universidades (2001) y la Ley de Educación (2006) que aportan una nueva visión del aprendizaje ahora por competencias, una estructura común basada en tres ciclos: "Bachelor", Master y Doctorado; y un nuevo modelo de formación de profesores basado en el Grado para Educación Primaria. Grado y Master para Educación Secundaria.

Tras este largo recorrido se llega al momento actual, en el que se asiste a un momento de consolidación, estabilidad, cualificación profesional y estatus académico de los matemáticos en sus distintas especializaciones, cuyas aportaciones han logrado hacerse visibles internacionalmente.

Cuadro síntesis de los periodos y sub-periodos para agrupar los libros de texto de matemáticas españoles

De acuerdo con todo lo dicho, el siguiente cuadro ofrece una síntesis de los periodos y sub-periodos que pueden usarse para agrupar los libros de texto de matemáticas españoles:

1. Periodo Primitivo:
   - Primeras culturas.
   - Cultura del Peloponeso.
   - Cultura del Helenismo.
2. Periodo de obscurantismo medieval:
   - De los manuscritos (s.VIII-IX).
   - De las traducciones (S.IX-XV).
3. Periodo del libro impreso:
   - Del humanismo y de las aritméticas (s. XV-XVI).
   - Del predominio de las órdenes religiosas en la enseñanza (s. XVI-XVIII).
   - Del predominio de las instituciones civiles-militares (s. XVIII-XIX).
4. Periodo del libro de enseñanza:
   - De desarrollo del informe Quintana (1814).
   - De desarrollo de la ley Moyano (1857).
5. Periodo del libro escolar:
   - De desarrollo del Plan Romanones (1901).
   - De desarrollo del Plan Ruiz Jiménez (1953).

- De desarrollo de la Ley Villar Palasí de 1970.
- De las leyes educativas de la etapa de normalidad democrática.

EPÍLOGO

Las concepciones epistemológicas dominantes en cada periodo y sub-periodo de la historia de las ideas matemáticas y de su enseñanza, no solo están ligadas al momento histórico sino también al contexto en que se producen.

Para describir los contextos en que se producen esas concepciones, y los libros de texto que las reflejan, conviene agrupar en categorías los distintos hechos que se quieren resaltar. Así, por ejemplo, se pueden tomar como categorías relevantes una mejor descripción del contexto histórico, de los cambios político-sociales, del legado científico y matemático, y de la enseñanza y difusión del conocimiento.

Con estas componentes: periodos, sub-periodos y categorías, se puede disponer de un marco de referencia más completo para identificar, ubicar y contextualizar los autores y textos más representativos del desarrollo y enseñanza de la cultura matemática española.

Es evidente que el trabajo que aquí se sintetiza es incompleto y limitado, queda mucho por hacer, pero pone de relieve que la dimensión de la tarea que nos ocupa no es imposible, ya que hemos empezado a caminar y pronto podremos juntar nuevas piezas para acercarnos progresivamente, como en el conocimiento de las matemáticas, al nivel superior.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Hernández, A., del Olmo, L., Pastro, M., del Rincón, Ch., García, P., Riviere, V. y Ruiz, P. (1995). *Breve historia de la educación matemática en España*. Madrid: Sociedad Madrileña de Profesores de Matemáticas Emma Castelnuovo.

Freudhental, H. (1981). Major Problems of Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2*)* 133-150.

Gómez, B. (1995). *Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores*. Col. Mathema. Granada: Comares.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX.* Tesis doctoral. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivola

Peset, (1999). La universidad en la época borbónica. En A. Furió (Ed.), *Historia de Valencia.* Valencia: Universitat de València y Levante.

Puig, L. (2006). Vallejo Perplejo. En Maz, A., Rodríguez, M. y Romero, L., *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 113-138). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba.

Rico, L., y Maz, A. (2005). Matemáticas, libros y matemáticos: un recorrido por su historia y su relación con las enseñanza en España. En *El libro español de Matemáticas* (pp. 11-35). Córdoba: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.): 1945-1995. *Enseñanza de las Ciencias*, 17(3), 463-476.

Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma. Libros impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En Agustín Escolano (Ed.) *Historia ilustrada del libro escolar en España*. Vol. 2. Madrid: Fundación G. S. Ruipérez.

Wussing, H. (1979). *Lecciones de historia de las matemáticas*. Madrid: Siglo XXI.

Margarita Comas (1892-1973) y su aportación a la Educación Matemática

Modesto Sierra Vázquez mosiva@usal.es
Carmen López Esteban lopezc@usal.es
Universidad de Salamanca

Resumen: *Esta comunicación forma parte de una investigación más amplia sobre la Formación Inicial de Maestros en Aritmética y Algebra a través de los libros de texto. Comenzaremos presentando algunos datos biográficos de Margarita Comas y seguiremos con algunos resultados de cómo se enseñó la Aritmética y el Álgebra en la formación de Maestros en el periodo de la Segunda República (1931-1936).*

Palabras Claves: *Formación de Maestros, Margarita Comas, Aritmética, Álgebra, análisis de manuales, Educación Matemática.*

Abstract: *This paper is part of a comprehensive research on the Initial Formation of Teachers in Arithmetic and Algebra through textbooks. We will start presenting some biographical data of Margarita Comas and will continue with some of the results of how was the teaching of arithmetic and algebra in the training of teachers in the period of the Second Republic. (1931-1936).*

Keywords: *Teacher Instruction, Margarita Comas, Arithmetic, Algebra, Analysis Manual, Mathematics Education.*

RESEÑA BIOGRÁFICA

Margarita Comas es una figura reconocida en el campo de la pedagogía española, al que dedicó la mayor parte de su actividad profesional e intelectual: trabajó fundamentalmente como profesora de ciencias en las Escuelas de Magisterio, y entre 1933 y 1936 fue profesora de Biología Infantil en la Facultad de Pedagogía de la Universidad de Barcelona. Sin embargo, su orientación hacia el magisterio y la pedagogía estuvo en parte determinada por la dificultad de acceder a la formación universitaria y la investigación científica. Una aproximación biográfica la hemos encontrado en un librito-homenaje que desde la Facultad de Pedagogía de la Universidad de Barcelona se le hizo en 1998 por ser la primera profesora de la Facultad (Moreu y Vilafranca, 1998).

En su vida consideramos las siguientes etapas:

Infancia y primera juventud

Nació en Alaior (Menorca) el 25 de noviembre de 1892; sus padres fueron Rita Camps Mus y Gabriel Comas Ribas. Su padre era un maestro con ideas liberales que participó activamente en los movimientos de renovación pedagógica de su época, manteniendo intensa relación con la *Institución Libre de Enseñanza*.

Realizó el Bachillerato con brillantes calificaciones y obtuvo el título de Maestra de Primera Enseñanza Superior en 1911. Al terminar acompañó a su padre en un viaje para conocer algunos centros escolares innovadores de Europa. En particular visitaron Francia, Bélgica y Suiza. Durante el curso 1911-12 permaneció en Albi (Carcasonne, Francia) como *lectora* de Lengua española en la Escuela Normal de Institutrices de Tarn. Ingresó, en 1912, en la Sección de Ciencias de la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio de Madrid, terminando sus estudios en 1915, con el número uno de su promoción.

Figura 1
Margarita Comas

Primeros trabajos como profesora

Comenzó ejerciendo en la Escuela Normal de maestras de Santander como docente de Física, Química e Historia Natural, en el que sería el primer año de funcionamiento de este centro. En 1920 disfrutó de una beca de la Junta de Ampliación de Estudios (JAE) para ampliar estudios durante nueve meses en Inglaterra. Allí, durante el curso 1921- 1922, estudió Física y Química, hizo prácticas en el *Bedford College for Women* de la Universidad de Londres, asistió a cursos de Metodología de las Ciencias en el *London Training College* y visitó las principales escuelas londinenses de enseñanza primaria, secundaria y de magisterio, estudiando la didáctica empleada en la enseñanza de las ciencias fisicoquímicas y naturales.

En 1918 cuando aún trabajaba en la ciudad cántabra, decidió cursar la licenciatura en Ciencias, Sección de Naturales, en Madrid, con las consiguientes dificultades ya

que debía viajar continuamente entre Madrid y Santander. Al ser traslada a la Escuela Normal de Tarragona continuó estos estudios en la Universidad de Barcelona donde obtuvo, en 1925, el Premio Extraordinario de Licenciatura y se examinó de las asignaturas de Doctorado (Carreño Rivera, 1996, p. 297; Marín Eced, 1991, p.95). Solicitó a la JAE, en octubre de 1925, una nueva pensión por un año en los Laboratorios de Psicología de la Universidad de París donde consiguió el doctorado en Ciencias Naturales. Su tesis doctoral versó sobre la "Contribución al conocimiento de la biología de *Chironomus humani* y de su parásito *Paramecius contorta*".

Madurez

A su regreso a España no consiguió acceder a un centro donde pudiera continuar su trabajo científico, como era su deseo. En 1933, entró como profesora en la Facultad de Filosofía y Letras de la Universidad de Barcelona, en la que enseñó Biología Infantil y Metodología. Durante los años de la Segunda República fue una militante activa formando parte de numerosas las Comisiones y asistiendo a diversos congresos de enseñanza.

Uno de los elementos que aparece de forma constante en su obra es su opción clara a favor de la coeducación. En un período histórico en el que el debate sobre la conveniencia o no de escolarizar niños y niñas juntos despertaba vivas polémicas, su obra de 1931 *La coeducación de los sexos* aportó un enfoque sociopedagógico que abogaba por una total transición hacia una sociedad igualitaria.

Exilio y muerte

Al inicio de la Guerra Civil Española se encontraba en Madrid y salió de España por la frontera de Irún. Margarita Comas vivió exiliada en Inglaterra, acompañada por su marido Guillem Bestard, pintor y fotógrafo mallorquín con el que se había casado en 1931, donde fue profesora de Biología en *Foxhole* y en la *Dartington Hall School* (Devon). Murió en Exeter, el 28 de agosto de 1973.

La Metodología de las Matemáticas en el Plan Profesional de la República

El llamado Movimiento Normalista Español del primer tercio del siglo XX (Sierra, 1994, Sierra y López, 2010) a través de su órgano de expresión la *Revista de Escuelas Normales* preconizó la necesidad de cambiar el Plan de estudios de Formación de Maestros de 1914, donde el énfasis estaba puesto en los contenidos debido al bajo nivel cultural con el que se ingresaba en las Escuelas Normales. Las Didácticas de las disciplinas (o Metodología según el lenguaje de la época) tenían en dicho Plan de Estudios un carácter meramente residual.

En el año 1931, seis meses después de proclamarse la Segunda República española, se promulgó el Decreto de 9 de Septiembre de 1931 y artículos adicionales en el Decreto 29 de septiembre de 1931 aunque no se publicó la Orden Ministerial del Reglamento de las Escuelas Normales, con el cuestionario de asignaturas

hasta el 17 de Abril de 1933. Se exigió el bachillerato para acceder a las Escuelas Normales al tiempo que se mejoró la formación teórica y didáctica de los alumnos normalistas, lo cual contribuyó a mejorar la calidad y el prestigio de estos estudios. El ingreso de los alumnos en las Escuelas Normales se hacía mediante examen-oposición a un número limitado de plazas. Al terminar el tercer curso los alumnos hacían un examen final de conjunto, que consistía en un ejercicio escrito sobre un tema, elegido entre tres sacados a suerte, del grupo de materias de "Conocimientos filosóficos, pedagógicos y sociales" y un ejercicio práctico que consistía en explicar a los niños de una escuela una lección.

Una vez aprobado las asignaturas de la formación profesional en tres cursos y el examen final de conjunto, los alumnos-Maestros eran destinados con esta denominación y el sueldo de entrada, durante un curso escolar completo, a Escuelas nacionales de la provincia. El Plan Profesional establecía el carácter universitario de las Escuelas Normales e introducía en la práctica escolar el principio de la coeducación, lo que suponía la fusión de las Normales de ambos sexos en una Normal mixta.

Según este Plan, la formación del profesorado era una de las claves para mejorar el sistema educativo. Como se ha dicho, el proceso formativo comprendía tres ciclos:

1º) Cultura general, recibida en los Institutos de Segunda Enseñanza.

2º) Formación profesional desarrollada en las Normales.

3º) Prácticas docentes en las escuelas públicas.

En la distribución horaria de las asignaturas del Plan Profesional se observa un claro predominio de las materias profesionales, las metodologías y las de orientación psicopedagógica: el 28,12% correspondió a las asignaturas psicopedagógicas y el 37,5% a las metodologías o didácticas, cifras indicadoras del viraje que experimentó el magisterio en beneficio del desarrollo pedagógico profesional de los maestros, lo que contrasta con los planes de estudio anteriores en los que la mayor parte del horario lo absorbían las materias de carácter enciclopédico. Por otra parte, en el perfil del título de maestro las asignaturas filosóficas, económicas y sociales tenían una presencia equivalente al 9,3%. A su vez, el conjunto de materias artísticas y prácticas en las que destacaban los Trabajos de Especialización y de Seminario suponían un 25% del horario, completando los contenidos teóricos del currículum permitiendo al maestro en formación ampliar sus horizontes e inquietudes a la vez que le ponían en contacto con las enseñanzas especiales.

Toda la formación teórica que recibía el alumno estaba perfectamente conjugada y articulada con la práctica. No sólo a través de las clases de Metodología que realizaba durante los tres años de estudio con clases teóricas en la Normal y prácticas de corta duración en las escuela aneja, sino por medio de las prácticas que realizaba por espacio de un año escolar en las escuelas nacionales o públicas una vez superados los tres primeros cursos de la carrera. Las prácticas se convirtieron en un componente básico dentro de la formación profesional del maestro superando la marginación a que estuvieron sometidas en los planes anteriores.

Con ello se cubría la formación científica, pedagógica y práctica de los maestros. Este plan de estudios ha sido valorado por amplios sectores sociales e intelectuales como el más completo que se ha cursado en las Escuelas Normales. En el preámbulo del citado Decreto se especificaban los requisitos que debían cumplir las escuelas de magisterio:

> [...] en la instrucción primaria el primer factor es el Maestro, toda la reforma se frustrará sin un Maestro que la encarnara en su espíritu. Urgía crear escuelas, pero urgía más crear Maestros; urgía dotar a la Escuela de medios para que cumpliera la función social que le está encomendada, pero urgía más capacitar al Maestro para convertirlo en sacerdote de esta función; urgía elevar la jerarquía de la escuela, pero urgía igualmente dar al Maestro de la nueva sociedad democrática la jerarquía que merece y merecerá haciéndole merecedor de ella... para ello se convierten las Normales en Instituciones Profesionales. Precisa, en fin, para la categoría y la eficacia científica de la profesión, la adquisición de estudios superiores; para que sea así se crea la Sección de Pedagogía abriendo al Maestro las puertas de la Universidad. (Decreto 9/09/1931, preámbulo)

Que los Profesores del Movimiento Normalista se sintieron identificados con la reforma de las Escuelas Normales lo prueba la satisfacción con la que la *Revista de Escuelas Normales* acogía el Plan de 1931. El editorial de la citada revista, al dar cuenta del nuevo Plan, se titulaba "El triunfo de nuestra Asociación"

> [...]el decreto del 29 pasado, por el que se reforma tan profundamente nuestras Escuelas Normales; mejor diríamos, por el que verdaderamente se crean las Escuelas Normales en España... La Asociación no ha dejado de laborar para que las Escuelas Normales fueran verdaderas Escuelas de Pedagogía, donde la educación profesional del futuro Magisterio primario fuese realidad y no ficción, como era en las Normales que acaban de desaparecer. (*Revista de Escuelas Normales*, 1931, vol. IX, p. 135).

En el Plan de Estudios Profesional de Formación de Maestros de la República, se introduce la asignatura *Metodología de las Matemáticas.* De un total de veintiocho materias solo una materia corresponde a *Metodología de la Aritmética y la Geometría* de 3 horas semanales en Primer Curso, lo que supone el 5% del horario, pero supone, desde nuestro punto de vista, una ruptura epistemológica con la concepción dominante en los anteriores Planes de Estudio en la formación matemática de los Maestros. De este modo la nueva materia incorpora diversas cuestiones (Sierra, 1994):

a) La necesidad de conocer la psicología del aprendizaje de las Matemáticas.
b) La introducción de cuestiones relacionadas con la historia de las Matemáticas.
c) La presencia de métodos de enseñanza como los de Froebel, Montessori, Decroly, Método de proyectos y escuelas nuevas.

d) La realización, con carácter complementario, de trabajos monográficos por parte de los alumnos, que podían versar sobre cuestiones de ampliación doctrinal, sobre investigación de aptitudes o ensayos de procedimientos metodológicos.

Como se ha señalado anteriormente el Plan de 1931 no fue solamente fruto de las inquietudes educativas de un gobierno progresista sino también el resultado del movimiento de Profesores de Escuelas Normales. En este movimiento participaron activamente profesores como Margarita Comas, Felipe Saiz, José Mª Eyaralar, entre otros, vinculados a la enseñanza de las Matemáticas en estas Escuelas. A través de las páginas de la *Revista de Escuelas Normales* asistimos a sus propuestas de renovación metodológica defendiendo a ultranza la profesionalización de la enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas Normales y la necesidad de considerar la Metodología de las Matemáticas como una parte específica de la formación de Maestros. Asimismo estos profesores publicaron libros de texto para la formación inicial y permanente de los Maestros (Sierra, 1994).

Estas posturas quedan reflejadas en el Cuestionario de la asignatura "Metodología de las Matemáticas" que constituye una ruptura con los planteamientos de los Planes de Estudio anteriores (Sierra y López, 2010).

APORTACIONES DE MARGARITA COMAS A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Entre 1923 y 1936 los Profesores de Matemáticas más activos en el Movimiento Normalista publicaron sus artículos, sugerencias e iniciativas en las páginas de la *Revista de Escuelas Normales,* así como en la *Revista de Pedagogía* (1922 - 1937) y en el *Boletín de la Institución Libre de Enseñanza*; igualmente publicaron monografías destinadas a la formación matemática de los Maestros. La indagación en estas publicaciones lleva a establecer tres planos distintos en sus aportaciones (Sierra, 1994):

- En el teórico, tratando de identificar componentes básicos en la formación matemática de los Maestros;
- En el profesional, reclamando la presencia de la Metodología de la Matemática en los Planes de estudio de las Escuelas Normales; y,
- En el práctico, escribiendo trabajos y monografías destinados a la formación de los Maestros, tanto en lo que se refiere a la formación inicial como a la de aquellos que ya ejercían la profesión.

La profesora Comas realizó valiosas aportaciones, tanto a las Ciencias como a la Pedagogía, de lo que dan fe sus numerosas publicaciones, bien en forma de artículos, sobre todo en la *Revista de Pedagogía*, o bien en formato de libro. Así, además de trabajos propiamente científicos, contribuyó a la difusión de los métodos pedagógicos más innovadores, como el Método Mackinder o el de Proyectos, y como miembro de la de la Institución Libre de Enseñanza mostrará explícitamente

en su obra los métodos de la Escuela Nueva; también dio a conocer sus impresiones y experiencias sobre la enseñanza, particularmente –aunque no sólo– de las Ciencias Naturales recogidas en sus viajes, De su conocimiento sobre las orientaciones que guiaban la enseñanza de las ciencias en Inglaterra y de su puesta en práctica en el aula, recoge la profesora Comas tres rasgos esenciales:

(i) la nueva concepción de los contenidos de enseñanza (*Nature Study*) orientados al conocimiento del entorno natural del alumno,

(ii) la importancia de las actividades experimentales en la enseñanza de las ciencias y

(iii) el papel activo que debe jugar el alumno en la realización de las tareas escolares.

Aspectos que considera que deberían ser trasladados a las clases de matemáticas en las escuelas españolas, por las ventajas educativas que supondrían frente a la enseñanza que se venía practicando en nuestro país: contenidos basados en una visión sistemática y calculo mercantil, actividades reducidas a la utilización del libro de texto y enseñanza centrada en las explicaciones del profesor. "Es indispensable hacer lo posible, procurando que el alumno sienta la necesidad del conocimiento que se trate de inculcarle, ya nazca ésta de un motivo práctico (construcciones, dibujos de mapas, etc.) o de uno científico o estético" (Comas, 1932a, p. 16).

Entre sus publicaciones damos cuenta de las siguientes:

- COMAS, M. (1920). *La enseñanza de las ciencias,* Reinosa.
- COMAS, M. (1923). *La enseñanza elemental de las ciencias físico - naturales y de las matemáticas en Inglaterra.* Reinosa: Tipografía de A. Andrey y Cª.
- COMAS, M. (1928). *Aritmética.* Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- COMAS, M. (1931). *La coeducación de los sexos*. Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- COMAS, M. (1932). *Metodología de la Aritmética y la Geometría.* Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- COMAS, M. (1932). *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría*, Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- COMAS, M. (1937). *Contribución a la metodología de las ciencias naturales.* Gerona: Dalmáu Carles, Pla. E.C. Editores.
- COMAS, M. (1957). *La biología en la enseñanza media y superior de Inglaterra.* Madrid: Publicaciones de la Revista de Pedagogía.

Interesada por la metodología y didáctica de las ciencias escribió sobre varios artículos que vieron la luz en la *Revista de Pedagogía* (1925-1936). Algunos de ellos son:

- La enseñanza de las ciencias físiconaturales en Francia. *Revista de Pedagogía*, 1926, nº 58, 448-453.
- Evolución y herencia. Conferencias impartidas en la Universidad Internacional de Santander. *Revista de Pedagogía*, 1934, nº 146 y nº 147.
- Genética y Eugenesia. *Revista de Pedagogía*, 1935; n° 158, 72-78.
- Las Ciencias Naturales en la escuela. *Revista de Pedagogía*, 1936, nº 171, 97-104.

Para Margarita Comas, el método seguido en la enseñanza de las matemáticas sea fructífero debe centrarse en la actividad del alumno, lo que implica un cambio en el papel a jugar por el maestro en el desarrollo de la enseñanza; éste debe actuar como orientador y guía, sin obstaculizar la actividad indagadora de los alumnos. La metodología seguida en el proceso de construcción del conocimiento deber ser la referencia a la hora de dirigir la enseñanza de las matemáticas. Se trata de principios ya enunciados, los postulados de la Escuela Nueva (movimiento de innovación pedagógica en plena difusión en esos años) que propugnaban basar la enseñanza en la actividad del alumno; sin embargo, Margarita Comas introduce una modificación sustancial, hace hincapié en la importancia de ofrecer a los alumnos oportunidades de trabajar de manera similar a como lo hacen los científicos. Piensa, como el resto de los renovadores de la disciplina, que es importante trasladar al aula algunos procedimientos propios de la metodología científica, pero, a diferencia de otras propuestas, no cree que su aplicación a la enseñanza deba tener como fin último la comprobación de leyes y principios mediante la observación y la experimentación. Para Margarita Comas, diseñar y proponer tareas que posibiliten la actividad indagadora de los alumnos, y la aplicación del conocimiento obtenido a otras ciencias debe ser el modelo a seguir en la enseñanza de las matemáticas:

Siempre que se pueda, es útil aplicar las ideas de matemáticas al levantamiento de planos, cálculo de distancias inaccesibles, etc., aun a expensas de la adquisición de otros conocimientos teóricos; las clase de Geografía y de Ciencias saldrán ganando, y también, sobre todo la mente del alumno (Comas 1932a, p. 23).

En ellos intuimos la idea de *competencia básica matemática* que está presente en la actual Ley Orgánica de Educación (LOE). Estas orientaciones son fruto de su conocimiento sobre las metodologías que guiaban la enseñanza de las matemáticas en Inglaterra y de su puesta en práctica en el aula.

Análisis de contenido de Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría de Margarita Comas

Figura 2
Portada del libro
Cómo se enseña la aritmética y la geometría

El Análisis de Contenido tal y como aquí se presenta, es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares. Hemos utilizado la metodología recogida en el artículo de Rico, Marín, Lupiañez y Gómez (2008) junto con la preconizada en Sierra, González y López (1999, 2003), así como la tesis doctoral de López (2011). Por ello el Análisis de Contenido comienza por el Análisis Cognitivo donde analizaremos cuales son las definiciones de los contenidos matemáticos como objetos de aprendizaje, estableceremos una clasificación detallada de ellos y mostraremos el sistema de relaciones que se generan entre los distintos tipos de contenidos con lo que construiremos, en cada caso, un mapa conceptual; sigue con el estudio y revisión de los Sistemas de Representación, cualquier modo de hacer presente un concepto (Castro y Castro, 1997), junto al Análisis Fenomenológico que consiste en delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que estos muestran su funcionalidad.

Análisis Cognitivo

Este libro de Margarita Comas *Cómo se enseña la Aritmética y la Geometría* editado en 1932 por la *Revista de Pedagogía*, se divide en dos partes.

La PRIMERA PARTE de Principios Generales. Comienza señalando los dos aspectos que debe tener la enseñanza de las Matemáticas en la escuela primaria (y casi lo mismo ocurre con las demás materias): uno, el principal, es educativo, de

formación; el otro, esencialmente práctico. La preparación matemática del alumno que entra en la vida debe, pues comprender:

a) Conocimiento de las verdades fundamentales.

b) Facilidad para calcular mentalmente y por escrito.

Entre uno y otro fin no hay oposición, se complementan mutuamente (p. 7).

Método cíclico: "se deduce de todo lo dicho que una verdad, una operación o una regla, no es dominada de una vez por el alumno, sino que se presenta primero en forma concreta y sensible, y es abandonada después por cierto tiempo. Más adelante se recapitula, se derivan algunos principios o aplicaciones más difíciles y se deja de nuevo, antes de que los niños tengan tiempo de cansarse, y así, de año en año, se amplía y profundiza hasta que se domine la cosa completamente" (p. 9)

Dinamicidad: "el capacitar al alumno para el descubrimiento de nuevas verdades matemáticas tiene tanto o más interés que el enseñarle las fundamentales, comprenderemos cuán importante es no darle los principios como cosa hecha, sino hacerle ver su proceso" (p. 11).

Trabajo escrito: "se ha discutido mucho acerca de época en deben introducirse los ejercicios escritos en matemáticas. No hay, desde luego, inconveniente en que los niños representen por cifras los números que conozcan; pero hasta que se ha alcanzado una cierta facilidad en el cálculo mental, es por lo menos superfluo el hacer operaciones por escrito. El uso del simbolismo debe ser consecuencia de una necesidad sentida, y sólo cuando las operaciones sean con números elevados se ganará tiempo escribiéndolas" (p. 13). Para la introducción del símbolo se propone que los alumnos de primer grado lleven al colegio una pizarrita, y en segundo grado se lleve un cuaderno de problemas, "si es posible, con una hoja rayada y otra hoja cuadriculada, como se usa en Inglaterra", otro para dibujar figuras y otro para resúmenes. En el último grado propone el uso de un único libro para interpretarlo "antes de que entren en la vida". Lo que pretende es que los alumnos desarrollen su capacidad de observación. Los libros adquieren dentro de este enfoque el papel de material de consulta, donde los alumnos –y el propio profesor– pueden tomar notas para completar sus informes.

Problemas: "deben ser la base de toda la enseñanza elemental, sirviendo unas veces para descubrimiento de nuevas verdades y otras para comprobación e ilustración de las ya sabidas, en ocasiones para adquirir práctica" (p. 15). "El ideal sería que el programa estuviera de tal modo combinado que cada verdad central se encontrara como respuesta a un problema práctico surgido espontáneamente y que envolviera "actividad manual al mismo tiempo que mental". Las condiciones actuales de nuestras escuelas no permiten llegar a esta aspiración" (p. 16).

Realidad y utilidad: en este apartado Margarita Comas es muy crítica con la enseñanza de aspectos comerciales en la Aritmética: "muchos son los que confunden lo real con lo útil, usan sólo problemas de aritmética comercial desconociendo que para una mente infantil tiene tanta o más realidad que el precio del pan. Confundir el mundo en que vive el niño con lo que puede él ver y tocar tiene un cierto valor, pero no es posible limitarse a ello y hay que recordar que siempre que la imaginación juega

un papel importantísimo en la vida infantil y que debemos aprovecharla si queremos hacer de las matemáticas algo más que un mecanismo para contar" (p. 17).

La autora repasa los contenidos aritméticos que se enseñan en la Educación Primaria y le da importancia a algunos puntos concretos en la enseñanza de la Aritmética.

El uso de letras en la aritmética elemental es conveniente si la mente de los niños ha sido preparada para ello por el trabajo anterior. La introducción de símbolos algebraicos es sólo un paso más en el proceso de abstracción y generalización, "que, si está bien dada, forma el ciclo de la enseñanza toda" Y se propone el siguiente ejemplo (p. 22):

6 manzanas	+2 manzanas	= 8 manzanas
6 perros	+ 2 perros	= 8 animales
6	+2	= 8
6 *p* (inicial de pera)	+ 2 *p*	= 8 *p*
6 *a* (objeto cualquiera)	+2 *a*	= 8 *a*
m *a*	+ n *a*	= (m + n) *a*

Donde todos son una suma, los dos primeros ejemplos son del *Kindergarden* (término inglés que usa Comas que no tiene reflejo en la sociedad española de la época), de aritmética concreta, la tercera, de aritmética propiamente; la quinta es aritmética general (el paso entre ambas lo marca la cuarta) y la sexta es de álgebra. Estas fases desde la Aritmética al Álgebra están explicitas en el libro:

> Son fases típicas del desarrollo del pensar matemático y si cada una de ellas ha sido suficientemente dominada, se puede pasar a la siguiente, sin dificultad, y aun con gusto por parte de los niños, sobre todo si éstos comprenden el ahorro de tiempo y trabajo que ello significa (p. 21).

Esta idea de sucesiva abstracción desde la Aritmética al Álgebra, es totalmente novedosa y muestra por parte de Margarita Comas un conocimiento de diferentes teorías tanto psicológicas, como de enseñanza de las Matemáticas.

En la SEGUNDA PARTE del libro Margarita Comas prepara programas distintos para cada grado de enseñanza, aunque indica que "sólo es una especie de cuestionario", porque cree que el programa debe hacerlo cada maestro según sus medios, sus alumnos y sus aficiones. En ellos incluye ciertas actividades en cuanto a Aritmética para cada nivel apropiado a esa edad de los alumnos, de los cuales analizaremos qué representaciones y fenómenos utiliza para la enseñanza.

Sistemas de Representación

Margarita Comas propone que en cada una de las lecciones se usen una multiplicidad de sistemas de representación, partiendo de la enseñanza intuitiva de las matemáticas y sin eliminar la enseñanza formal y abstracta:

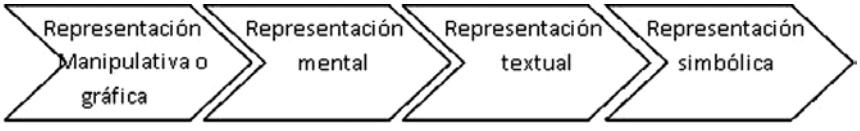
Material manipulativo: sugiere "partir siempre de la resolución de problemas y hacer otros que envuelvan varias operaciones fáciles, pero nada en abstracto, poniendo al lado de las cantidades los objetos de que se trata, y sólo en algún caso referirse a ellos de memoria" (p. 24) Para esta representación de cantidades recoge la lista del Material que para niños de primera enseñanza existe en el Instituto Escuela: "una caja con conchas, una caja de piedrecitas de río; una caja de semillas; mil centímetros cúbicos sueltos, de madera en una caja cúbicas; una colección de varillas de hierro; una colección de figuras de madera; una colección de soldaditos de plomo; una colección de monedas; treinta tableros con orificios a un centímetro de distancia; dos metros graduados, uno plegable y uno rígido; un litro, un decilitro", lo que muestra que la enseñanza intuitiva de las matemáticas no exige gastos ni aparatos especiales; aunque ella añadiría: papel cuadriculado, cartón, encuadernadores abundante, regla, escuadra y unas balanzas (incluso explica cómo hacer una balanza) con su sistema de pesas.

En el segundo grado, "por motivo de un caso práctico" propone el uso de tiras de papel para los quebrados, y sugiere la inventiva del maestro para sustituir aquel material que no le es posible comprar. También nos hace ver la ventaja de la linterna de proyecciones para estudiar figuras semejantes y transformaciones, pero también nos propone que la luz de una bujía puede conseguir, en la mayor parte de los casos, el mismo efecto.

El material que propone para tercer grado, es que cada alumno tenga su propia caja de compases y además en la clase se dispondrá de una colección de pesas y medidas del sistema métrico decimal, un aparato para medir ángulos, probetas, y también una pizarra esférica.

Representación textual y simbólica: la representación manipulativa es el comienzo de las lecciones de Aritmética en el manual de Margarita Comas, pero los ejercicios con cantidades concretas deben de tener un reflejo en la mente del niño a través de la abstracción.

El esquema siguiente muestra la secuenciación que propone Margarita Comas en estos sistemas de representación, como las representaciones se van introduciendo una en otra: Representación manipulativa o gráfica-mental-textual-simbólica:



Esta idea que se sugiere en todas sus lecciones queda muy bien reflejada en la lección de Aritmética que propone en tercer grado, que tiene por objeto estudiar el cuadrado de la suma de dos números como base para extraer la raíz (p 45). Comienza hallando el cuadrado de varios números 2, 4, el 8 representarlos con papel cuadriculado, observando por parte de los niños que el cuadrado de un número se representa por un cuadrado. Después, con el ejemplo de hallar el cuadrado de la suma de 20+4, y preguntándose si será igual al cuadrado de 20 más el cuadrado

de 4, llega a visualizar que quedan dos rectángulos iguales que tienen de lado 20 y 4 con lo que se visualiza el resultado. Continúa proponiendo repetir el ejercicio con otros números para llegar a hacer la operación sin necesidad de representar y después a la regla general, tanto en su expresión textual como simbólica.

4.3. Análisis Fenomenológico

El análisis fenomenológico de una estructura matemática consiste en delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquellas en las que estos muestran su funcionalidad. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan tareas que se proponen a en el texto. La mayor parte de las lecciones y ejercicios que propone transcurre en un contexto intuitivo de las matemáticas. Al plantear un nuevo problema, utiliza material cercano al niño:

Cuando más sencillo y más conocido es el material empleado menos distraen los niños su atención en las complicaciones de la cosa, olvidándose de la verdad esencial que quiere el maestro deducir (p. 35).

En la actividad propuesta para primer grado que tiene por objeto aprender el valor relativo de las cifras, el uso del cero y la escritura de cantidades fáciles, sobre la base que los niños sepan contar hasta 999 y conozcan el valor absoluto de las cifras (p. 29) con el ejemplo del número 263, se van haciendo montones con piedrecitas, separando por cajas, las centenas, las decenas, las unidades, ayudándose de la representación de rayas y puntos. Luego se proponen otros ejemplos de escritura y lectura de cantidades (siempre de tres cifras como máximo) en que entre el cero.

En muchos ejemplos de ejercicios que propone Margarita Comas el sujeto del problema es un niño o una niña o están escritos en primera persona y el contexto en el que se desarrollan la mayoría de los problemas es el colegio, la clase y el patio.

Para Aritmética para segundo grado se propone la multiplicación (p. 40), parte del problema "averiguar cuántas piedrecitas hay en tres cajas que tiene el maestro, sabiendo que en cada una de ellas hay 243" y comenta cómo el niño va descubriendo que repetir 243 tres veces es multiplicar cada una de esas cifras por 3. El siguiente paso es proponer problemas análogos. Y después, para facilitar la operación y hacerla clara, se les enseña el signo, la manera de poner el multiplicando, el multiplicador y el producto. Sigue con ejemplos con mayor número de cifras en el multiplicando y multiplicador más alto, con lo que los niños empiezan a encontrar dificultades, aun ayudándose de rayas y puntos y surge la necesidad de la tabla, y hacer que se la estudien de memoria. El último paso es resolver nuevos problemas para hacerles adquirir práctica.

Los problemas deben ser abundantes y propone algunos ejemplos de representación gráfica de problemas aritméticos, como (p. 44):

11.º Representar gráficamente $\frac{3}{4}$ y $\frac{1}{5}$, y notar su equivalencia en decimales.

Con problemas de este tipo realiza distintas representaciones de un mismo objeto matemático, anticipándose a la idea actual en Didáctica de las Matemáticas de que son necesarias diversas representaciones para la comprensión de un concepto.

CONCLUSIONES

Respecto la formación de Maestros, el Plan de 1931 no fue un mero cambio que elevaba el nivel profesional de la preparación de los Maestros situándolo en el nivel universitario sino esencialmente un instrumento para cambiar la enseñanza primaria. En este nuevo Plan de Estudio aparecía una asignatura con el nombre "Metodología de la Matemática" cuyo cuestionario supone una ruptura con la concepción sostenida en los anteriores planes de estudio acerca de la formación matemática de los Maestros. La Metodología de las Matemáticas se entendía como el conjunto de métodos, procedimientos, materiales, etc., para la enseñanza de las Matemáticas en la educación primaria y en este sentido sería una parte de lo que hoy entendemos por Didáctica de las Matemáticas.

Durante el primer tercio del siglo XX se incorporan nuevas ideas pedagógicas, basadas fundamentalmente en las de Pestalozzi y Froebel que son clave para entender la corriente de la *Institución Libre de Enseñanza* (ILE) y la evolución de las matemáticas escolares y, en particular, la de las aritméticas. Poco a poco los enfoques conceptuales de la pedagogía de las matemáticas comenzaron a ganar terreno a los enfoques procedimentales, basados en el cálculo. Se extendió el interés por desarrollar nuevos métodos de enseñanza que sirviesen para que el aprendizaje de la matemática fuese significativo. Este es el caso de la denominada "enseñanza intuitiva de la matemática", idea central en el libro de Margarita Comas. Entiéndase que lo intuitivo no es lo contrapuesto a lo racional, en el sentido de empírico, sino que se trata de lo razonado, pero con razonamientos apoyados siempre en imágenes muy concretas. La idea de que la matemática escolar no debe ser una cosa típicamente abstracta sino que debe convertirse en ciencia experimental, se sustenta en la incapacidad del niño para hacer abstracciones y en que, en último término, los conocimientos matemáticos son hijos de la experiencia. Comas defiende que se debe empezar por medir, pesar, recortar, dibujar, etc. para no prescindir del elemento intuitivo, y, sobre todo, que la matemática sea una cuestión de comprender, ya que se considera que no tiene valor alguno lo que se aprende de memoria Se entiende que los procedimientos para hacer intuitiva la enseñanza de la aritmética se reducen a materializar los números de modo que puedan aparecer sus relaciones y propiedades. La intuición tiene gradaciones según que se empleen objetos (palillos, haces de diez palillos atados, etc. para los diferentes órdenes de unidad), imágenes (dibujos) o símbolos (u, para unidades, d, decenas, c, ...). También hay variantes en la representación. Además de la representación de los números mediante objetos para operar con ellos, se tiene la representación geométrica de los números para estudiar sus propiedades, como por ejemplo cuando se usa una figura rectangular para mostrar la propiedad distributiva o con los papeles cuadrados para hallar la fórmula del cuadrado de una suma; o la representación gráfica, como cuando se trata de hacer intuitivas las relaciones entre magnitudes y para ello utiliza.

Parece razonable suponer que si profesionales de la calidad y el nivel de producción de Margarita Comas hubieran podido continuar su labor en nuestro país, la Didáctica de las Ciencias y la Didáctica de las Matemáticas habría mantenido un proceso de construcción y consolidación como disciplinas semejantes al que siguió en otros países europeos. Pero la Guerra Civil española (1936-1939) y la posterior represión supusieron una ruptura difícil de salvar hasta hace veinticinco años.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Carreño Rivero, M. (1996). Margarita Comas Camps. En J. Ruiz Berrio (dir.), *La educación en España. Textos y Documentos*. (pp. 297-300). Madrid: Actas.

Castro, E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori.

Comas, M. (1932a). *Cómo se enseña la aritmética y la geometría*. Madrid: Pi y Margall. 5ª edición.

Comas, M. (1932b). *Metodología la aritmética y la geometría*. Madrid: Pi y Margall.

López, C. (2011). La formación inicial de Maestros en Aritmética y Álgebra a través de los libros de texto. Salamanca: Tesis doctoral. Universidad de Salamanca: Documento inédito.

Marín Eced, T. (1991). *Innovadores de la educación en España. Becarios de la Junta para Ampliación de Estudios*. Cuenca: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Castilla-La Mancha.

Moreu, A.C. y Vilafranca, I. (1998). *Margarita Comas, Pedagoga. Homenatge a la Nostra Primera Professora*. Barcelona: Facultat de Pedagogia. Universidad de Barcelona.

Revista de Escuelas Normales (1931), vol. IX, p. 135

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.

Sierra, M. (1994). Mathematics Education in the Spanish "Normalista" Movement. En N. Malara y L. Rico (eds.), *Proceedings of the First Italian - Spanish Research Simposium in Mathematics Education* (pp. 241-248). Modena: Departamento de Matemáticas.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias,* 17(3), 463-476.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación Matemática*, 15 (1), 21-50.

Sierra, M. y López, C. (2010). Innovaciones en la formación en Matemáticas y su Didáctica de los Maestros en el primer tercio del siglo XX: Aportación del movimiento normalista español (1923-1936), *Revista Interuniversitaria de Historia de la Educación*, 29, 179-193.

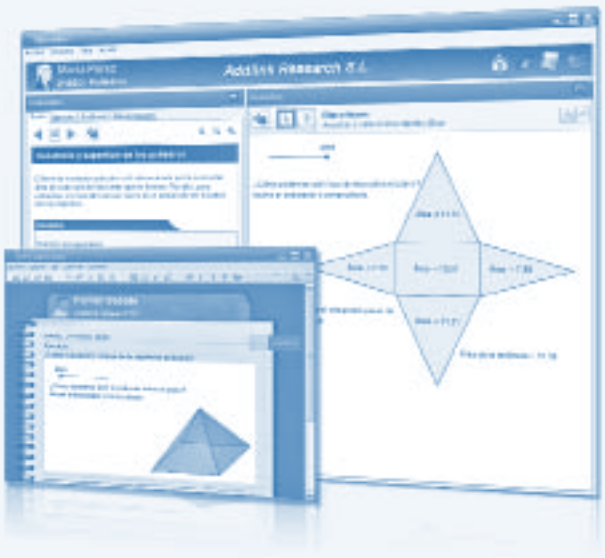
Si eres profesor
¡solicita tu
licencia gratuita!

TUTORMATES.

Un nuevo paradigma en la enseñanza de las Matemáticas

TutorMates es una herramienta única para docencia de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Se presenta como una aplicación completa para la enseñanza de las Matemáticas en el aula, integrando todos los contenidos curriculares vigentes en una plataforma que incorpora simuladores de matemáticas, geometría dinámica, ejemplos, ejercicios y tests de autoevaluación.

- **TutorMates** ya está en las aulas de 1º, 2º y 3º de la ESO.
- Material didáctico de apoyo a disposición de los docentes.
- Libreta Digital para tomar apuntes, resolver ejercicios y facilitar el intercambio de apuntes digital.
- No es imprescindible estar conectado a Internet para enseñar o trabajar con **TutorMates**.
- Disponible para los sistemas operativos Windows, Mac OSX y GNU/Linux.



Consulte la promoción especial para los lectores de Epsilon:

info@tutormates.es

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 39-50*

Orígenes y Evolución del Teorema de Rolle

Carlos O. Suárez Alemán
Departamento de Matemáticas
Universidad de Cádiz

Resumen: *Suele considerarse que Michel Rolle era un analista y que su famoso teorema fue fruto del incipiente análisis matemático. En este artículo se ofrece un recorrido por los principales hitos históricos que llevaron a la creación del teorema dentro del álgebra, verdadero campo de investigación de su autor, y cómo lentamente tuvo una larga transición hacia el campo del análisis.*

Palabras Clave: *Historia del análisis, teorema de Rolle, resolución de ecuaciones, Educación Matemática.*

Abstract: *Michel Rolle is generally considered as analyst and that his famous theorem was a result of mathematical analysis newborn. This article offers an overview of the historical milestones that led to the creation of the theorem in algebra, the original research by his author, and how slowly, and step by step, the theorem suffered a long transition to the field of analysis.*

Keywords: *Analysis history, Rolle's theorem, equation solving, Mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

Dentro del Análisis Matemático de una variable se considera que uno de los principales resultados es el conocido como Teorema de Rolle:

> *Si una función f es continua en un intervalo cerrado [a,b], derivable en intervalo abierto]a,b[y verifica que f(a)=f(b). Entonces existe al menos un valor c del intervalo]a,b[tal que la derivada de la función se anula en él.*

Este resultado, tan importante para el análisis, tiene una historia interesante y a su vez, de forma sorprendente, bastante alejada del mismo. En este artículo se intentará dar un paseo por esta curiosa historia.

Una de las conclusiones que se suelen ofrecer de este teorema es la que indica que una función continua y derivable verifica que entre cada dos raíces consecutivas de la función hay una raíz de la derivada. Y es precisamente en esta conse-

cuencia que de forma natural presentan los profesores del teorema donde está su origen histórico.

En muchos libros de texto de bachillerato se indica que el teorema indicado recibe el nombre de *Teorema de Rolle* porque es quien lo formuló por primera vez y que lo demostró utilizando el recién nacido cálculo diferencial. Y no es exactamente así.

Las primeras referencias que se tienen de este teorema se remiten a Bhaskara (1114-1185) y su libro *Siddhanta Shiromani.* A partir de los trabajos de su predecesor Manjula (ca 930 a.C.) que había llegado a obtener relaciones del tipo

$$sen\ w - sen\ w' = (w - w')\ cos\ w',$$

Bhaskara llegó a deducir que el seno y el coseno mantienen una relación del tipo que hoy indicamos como "derivada" una de la otra. A partir de aquí llegó a la conclusión de que cuando la ecuación de un planeta está en su punto más distante o en su punto más próximo a la tierra, la ecuación del centro se anulaba y también obtuvo que para una cierta posición intermedia, la ecuación "diferencial" de la ecuación del centro se anula. Esta es en sí la primera expresión que se realiza de este teorema (Gheverghese, 1996). Si bien es cierto que no existía un cálculo diferencial propiamente dicho, sino una interesante aproximación al mismo.

Posterior a esta expresión no se encuentran más indicaciones de este resultado hasta la versión ofrecida por el propio Michel Rolle (1652, 1719) que lo expone en su *Traité d'algèbre* publicado en 1690, aunque en el mismo no aportó una prueba convincente del mismo. La intención real de Rolle era dar un método para localizar las raíces de un polinomio de cualquier grado. Un asunto de gran interés en la época. A pesar de que el libro tuvo una gran aceptación, Rolle fue objeto de grandes críticas, según señala Smith (Smith, 1959, pp 253-260), por no incluir demostración alguna de este resultado. Rolle se vio obligado a publicar en 1991 un pequeño opúsculo *Démonstration d'une Methode pour resoudre les égalitez de tous les degrez;…* donde incluye la demostración de su método de cascadas.

MICHEL ROLLE (1652-1719)

Nacido en Amber (Francia), era hijo de un tendero que tan solo pudo proporcionarle una educación muy elemental. Comenzó trabajando como escribiente en notarías y despachos de abogados hasta que a la edad de veinte años se trasladó a París. Casado y pasando por grandes dificultades económicas, tuvo tiempo para interesarse de forma independiente en el estudio del álgebra y del análisis diofántico. En 1682 consiguió publicar en *Journal des sçavans* una elegante demostración de un problema publicado por Ozanam para encontrar cuatro números de manera que la diferencia de cada dos es la suma de los tres primeros y a su vez un cuadrado perfecto. Este hecho le supuso un gran reconocimiento social e incluso la posibilidad de dar clases particulares a la familia de un ministro que le permitió

mejorar su situación económica. En 1699 consiguió un puesto como geómetra en la Academia de París, puesto que mantuvo hasta que en 1708 sufrió un primer ataque de apoplejía del que logró recuperarse, pero no resistió el segundo en 1719.

Su actividad principal se centraba en el álgebra de ecuaciones, campo de las matemáticas en el que logró una gran reputación y que le permitió publicar en 1690 su *Traité d'algèbre*, su libro más famoso. Como curiosidad, en este libro se publica por primera vez el símbolo para la *n*-ésima raíz de *a* siguiendo una idea sugerida en una carta de Albert Girard (1590-1633) en 1629 y que rápidamente fue aceptada (Cajori, 1993-p. 372).

Algèbre contiene interesantes consideraciones para la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, donde Rolle utiliza algoritmos euclidianos para resolver ecuaciones diofánticas lineales y para la obtención del máximo común divisor de dos polinomios.

Por otro lado, cuando en 1696 se publica el *Analyse des infiniment petits* por L'Hospital, entre los miembros de la Academia de París se produjo una división de opiniones sobre este análisis infinitesimal. Por un lado estaban los seguidores del nuevo cálculo y por otro los críticos sobre él. Rolle adoptó una postura muy crítica con los infinistesimales pues consideraba que estos no estaban basados en sólidas bases de razonamiento y mantuvo un famoso enfrentamiento dialéctico con las ideas de Pierre Varignon (1654-1722) que defendía el uso de los mismos y que puede estudiarse en el artículo de (Mancosu, 1989). Para diversos historiadores del análisis, Rolle es uno de los principales exponentes de lo que se considera el primer gran ataque en contra del rigor del nuevo análisis, más concretamente contra la viabilidad de los infinitesimales. El segundo gran ataque surgiría unos años más tarde en Inglaterra con el conocido *The analyst; or a discourse addressed to an Infidel Mathematician wherein it is examined whether the Object, Principles, and Inferences of the modern Analysis are more distinctly conceived, or more evidently deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith* (El analista, o un discurso dirigido a un matemático infiel en donde se examina si el objeto, principios e inferencias del análisis moderno son más claramente concebidos, o más evidentemente deducidos, que misterios religiosos y los puntos de Fe) artículo del obispo George Berkeley (1685 - 1753) que tuvo una gran influencia posterior en el desarrollo y fundamentación del análisis matemático.

Se puede considerar a Michel Rolle como un hábil algebrista que rompió con las técnicas cartesianas, dominantes hasta su época y totalmente opuesto a las nuevas técnicas infinitesimales surgidas del nuevo cálculo diferencial.

MÉTODO DE LAS CASCADAS

En este punto, es evidente que existe una gran contradicción entre el hecho de que hoy se conoce al Teorema de Rolle como un importantísimo resultado del análisis matemático y sin embargo su origen lo encontramos en un matemático contrario al uso de estas técnicas.

Desde los inicios de la matemática, la búsqueda de las soluciones de una ecuación ha sido una constante en la investigación. De forma paralela a la búsqueda de algoritmos directos para resolver ecuaciones, cuyo punto más álgido fueron los trabajos de Girolamo Cardano (1501-1576), encontramos las aportaciones en la búsqueda de métodos iterativos de resolución de ecuaciones. De este modo podemos encontrar interesante métodos desde Mesopotamia hasta nuestros días (Chabert, 1999). Pero en todos ellos como indica (Goldstine, 1977) la eficacia está condicionada a la utilización de una primera aproximación de las raíces que se buscan, para lo que era necesario conocer cuántas puede haber y cómo localizarlas. Para dar respuesta al primer apartado, Girard estableció, sin aportar prueba alguna, en *L'invention nouvelle en l'Algèbre* de 1629 que toda ecuación polinómica de grado n tiene n raíces "si se cuentan las raíces imposibles (complejas) y si se tienen en cuenta las repetidas" (Kline, 1994, p. 361]), enunciando por primera vez el conocido Teorema Fundamental del Álgebra. René Descartes (1596-1650) incluyó este mismo resultado en *La géométrie* aunque se centra principalmente sobre las raíces reales y como es conocido Carl F. Gauss (1977-1855) demostró finalmente en su disertación de 1799 *Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse* (Nuevas pruebas del teorema donde cada función integral algebraica de una variable puede resolverse en factores reales de primer o segundo grado).

En el campo de la localización de raíces Thomas Harriot (1560-1621) en *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (publicado en 1631, diez años después de su muerte) publica por primera vez, aunque de nuevo sin prueba, un resultado en este sentido. La regla consistía en afirmar que el número máximo de raíces reales positivas de una ecuación polinómica es el número de variaciones de signo de los coeficientes, y que el número máximo de raíces reales negativas es el número de apariciones de dos signos «+» o dos «-» consecutivamente. Posteriormente, René Descartes publicó las mismas reglas, también sin demostración alguna, en *La géométrie* (Descartes, 1987, pp. 340-343). Hubo que esperar hasta 1741 para obtener una prueba de estos resultados de la mano de Abbé Jean-Paul de Gua de Malves (1712-1785) quien probó estos resultados en *Demonstrations de la règle de Descartes* (Gua, 1741 a y b).

En este contexto de localización de las raíces de una ecuación polinómica, Rolle es el primero que aporta un método algebraico para localizar las raíces de una ecuación polinómica de cualquier grado. De este modo, dada una ecuación polinómica $f(x) = 0$, Rolle define una cierta multiplicación de la función $f(x)$ por una progresión e iguala a 0, así obtiene lo que él denomina una *cascada*. Aunque su método es válido para cualquier progresión, solía utilizar la progresión 0, 1, 2, 3..... Después de la multiplicación de cada término de $f(x)$ por el correspondiente término de la progresión, la expresión resultante se dividía por x e igualaba el cociente a cero.

Es decir, dada

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n = 0$$

Al multiplicar cada término por 0, 1, 2, 3 … , respectivamente, obtenemos

$$0 \cdot a_0 + 1 \cdot a_1 x + 2 \cdot a_2 x^2 + \cdots + (n-1) \cdot a_{n-1} x^{n-1} + n \cdot a_n x^n = 0$$

o lo que es lo mismo

$$a_1 x + 2a_2 x^2 + \cdots + (n-1) a_{n-1} x^{n-1} + n a_n x^n = 0$$

dividiendo por x se obtiene la penúltima cascada

$$a_1 + 2a_2 x + \cdots + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + n a_n x^{n-1} = 0$$

Si observamos bien, vemos que este proceso conduce a lo que hoy conocemos como la derivada de $f(x)$ igualada a cero, $f'(x) = 0$, pero obtenida de forma algebraica.

Rolle repite este proceso hasta llegar a una cascada que no sea más que una ecuación de primer grado. En un ejemplo obtenido del propio *Algèbre*, tenemos la siguiente cascada completa

$$x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$$
$$4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$$
$$12x^2 - 144x + 396 = 0$$
$$24x - 144 = 0$$

Hay que indicar que Rolle solía escribir las cascadas al revés de cómo lo hemos indicado, empezado por la última y terminando por la primera.

Observemos que en este ejemplo todas las raíces son positivas, puesto que los signos de los coeficientes son todos alternos. El método se aplica siempre a este tipo de ecuaciones. Antes de comenzar Rolle "preparaba" la ecuación para conseguirlo de la forma que más adelante indicamos. De este modo acota las raíces con unos "límites" que son, como límite inferior *0*, pues todas son positivas. Los siguientes "límites" son las raíces exactas o aproximadas que obtiene de la cascada anterior y como "limite" superior el entero inmediatamente mayor al resultado sumar uno al cociente resultante de dividir el valor numérico del coeficiente negativo con mayor valor absoluto por el coeficiente de la x de mayor grado.

Inicia el proceso de localización de raíces del siguiente modo: de la última cascada, la ecuación de primer grado, obtiene la raíz, esto es $x = 6$. Toma la penúltima cascada, $12x^2 - 144x + 396 = 0$, considera el mayor coeficiente negativo, en este caso *-144*, toma su valor absoluto, lo divide por el coeficiente de la potencia mayor, suma 1 y redondea por exceso si es necesario, esto es $144 : 12 + 1 = 13$, por lo que obtiene los valores *0, 6* y *13* como "límites" que acotan cada una de las raíces de la ecuación $12x^2 - 144x + 396 = 0$.

El siguiente paso es realizar una estimación de las raíces. En este ejemplo Rolle comienza tomando como primera aproximación el valor medio entero entre *6* y *13*, esto es *9'5*, pero como *6* y *9* toman valores opuestos en la ecuación, $12(6)^2-144(6)+396<0$ y $12(9)^2-144(9)+396>0$, sabe que la solución está en medio. Vuelve repetir el proceso, tomar un valor entero intermedio entre *6* y *9*, esto es *8*. Y siguiendo así con este proceso llega a considerar que la raíz está comprendida entre *7* y *8*. Finalmente se queda con *7* al estimar que es una buena aproximación de la raíz. Hace lo mismo con los límites iniciales *0* y *6* llegando finalmente a que *4* es una aproximación de la raíz.

Ahora toma la siguiente cascada, $4x^3 - 72x^2 + 396x - 648 = 0$. Repitiendo el proceso para determinar los límites, calcula el "límite" superior de las raíces, $648:4+1=163$ y de este modo obtiene que las raíces están comprendidas entre los números *0, 4, 7* y *163* al considerar *0* como el menor por ser todas positivas, *163* como la mayor y *4* y *7*, las intermedias por ser las raíces de la cascada anterior.

Aplicando el mismo proceso de aproximación, Rolle llega a calcular que *3, 6* y *9* son las raíces de la tercera cascada. Esto conduce a que las raíces del polinomio están comprendidos entre los valores *0, 3, 6, 9* y *649* que son los "límites" de las raíces de $x^4 - 24x^3 + 198x^2 - 648x + 473 = 0$. Usando su proceso de aproximación, llega a encontrar que 1 es una raíz exacta, y después indica que *6, 8* y *10* son raíces aproximadas.

En el caso de que no todas las raíces sean positivas, Rolle realiza una transformación previa basada en el cambio de variable $y=x-h$, donde h es un número suficientemente grande para hacer que todas las raíces sean positivas. Por ejemplo, en el caso

$$x^5 +10x^4+2x^3-110x^2+x-120=0$$

no tiene todas las raíces reales positivas puesto que hay signos positivos consecutivos, entonces haciendo el cambio $y = x -10$, obtenemos

$$(y-10)^5+10(y-10)^4+2(y-10)^3-110(y-10)^2+(y-10)-120=0$$

de donde se obtiene

$$y^5-40y^4+602y^3-4170\ y^2+12801y-13130=0$$

que tiene todos los coeficientes con signos alternos, por lo que sus raíces son todas positivas.

La justificación de Rolle, aportada en *Démonstation…* se basa en el siguiente resultado:

> *Corol. III De la misma manera, es evidente que las raíces (todas positivas y distintas) son números colocados cada uno entre estos límites, y por consiguiente, si las raíces son substituidas en una ecuación cuyas raíces son estos*

límites, esta substitución dará resultados alternadamente positivos y negativos, o negativos y positivos.

Una idea de la demostración, en notación actual, sería la siguiente. Consideremos un polinomio mónico $P(z)$ de grado n con raíces reales positivas y distintas $a > b > c > \ldots > m$, multiplicamos $P(z)$ termino a término por la progresión aritmética $y, y + v, y + 2v, \ldots , y + nv$. Necesitamos mostrar que la cascada resultante $C(z)$ toma valores positivos y negativos (o negativos y positivos) para cada dos raíces consecutivas a, b de $P(z)$, tomadas a, b como límites de las raíces de $C(z)$.

Primero consideremos que podemos escribir $P(z) = (z - a)(z - b)\, K(z)$, donde $K(z)$ es un polinomio Mónico de grado $(n - 2)$. Multiplicamos el producto $(z - a)(z - b) = ab - (a + b)z + z^2$ término a término por y, y + v, y + 2v, de donde obtenemos la cascada parcial $C^*(z) = aby - (a + b)z(y + v) + (y + 2v)z^2 = aby - ayz - byz - avz - bvz + yz^2 + 2vz^2$. Ahora calculamos $C^*(a)$ y $C^*(b)$ obteniendo

$$C^*(a) = (a - b)va \qquad \text{y} \qquad C^*(b) = (b - a)vb.$$

Obsérvese que tanto $C^*(a)$ como $C^*(b)$ no dependen de y, sino sólo de v, razón por la que el teorema es válido para la multiplicación por cualquier progresión aritmética, aunque realmente Rolle, no señala esta puntualización. También podemos observar como ambos valores $C^*(a)$ and $C^*(b)$ tendrán signos opuestos. Y es claro que en el caso de utilizar el polinomio $P(z)$, se obtendría la cascada completa $C(z)$, y en este caso $C(a) = (a - b)vaK(a)$ y $C(b) = (b - a)vbK(b)$. Donde tenemos que considerar que $K(a) \neq 0$, $K(b) \neq 0$ y además $K(a)$ y $K(b)$ tienen el mismo signo puesto que $K(z) = (z - c) \ldots (z - m)$ y habíamos considerado que a y b son mayores que las raíces de $K(z)$.

En las proposiciones siguientes Rolle llega a probar que estos resultados son los mismos cuando se considera cualquier pareja de raíces consecutivas del polinomio, por lo que su método sería válido.

Es importante destacar dos aspectos. Como indica (Barrow-Green, 2009), el primero es que el resultado que Rolle demuestra tiene una gran generalidad, puesto que utiliza cualquier progresión aritmética, no sólo la que produce la derivada 0, 1, 2, 3, … . Por otro lado, la demostración aportada por Rolle en *Démonstrations…* es el resultado inverso a lo que afirmaba en *Algèbre*. Las raíces de cada polinomio son los "límites" de la cascada siguiente, la de mayor grado. Mientras que lo que demuestra es que las raíces de cada Polinomio son los "límites" de cada cascada de grado inferior. Esto es lo que (Cajori, 1911, 301) llama el corolario de Rolle, aunque en realidad era la regla original de Rolle. Pero en definitiva, la importancia de la demostración radica en el hecho de que el método de las cascadas ofrece las garantías necesarias para localizar todas las raíces reales de la ecuación original.

EL TEOREMA DE ROLLE DURANTE LOS SIGLOS XVIII Y XIX

Este resultado fue aceptado con normalidad y difundido en Europa con rapidez, así lo podemos encontrar en 1708 en libro de Charles-René Reyneau *Analyse demontrée ou la methode de résoudre les problêmes des mathematiques* (Análisis demostrado o los métodos para resolver problemas matemáticos) (Reyneau, 1708) y en un artículo de Colin Maclaurin (1698-1746) publicado en *Philosphical Transactions* en 1729 e incluido en su tratado póstumo de álgebra de 1748 (Maclaurin, 1748). Pero en ninguna de estas referencias el Teorema de Rolle fue considerado como un teorema del cálculo, sino dentro de su contexto original: un resultado de álgebra.

La primera vez que se encuentra este teorema en un tratado relacionado con el Cálculo es de la mano de Leonhard Euler (1707-1783) en 1755 cuando incluye una versión del Teorema en *Institutiones calculi differentialis* (Euler,1755, 657–660). El teorema sigue apareciendo dentro de un contexto de resolución de ecuaciones, pero ahora por primera vez aparece expresado en términos del lenguaje del cálculo.

Supongamos la ecuación $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \ldots = 0$ con raíces distintas $p < q < r <\ldots$. Euler considera la función general $z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots$ en la que x viene creciendo desde "$-\infty$"

> […] que conforme x va tomando valores mayores, es evidente que z tomará valores mayores que cero o menores que cero, pero no se anula antes de poner $x = p$, en cuyo caso $z = 0$. Como los valores de x se incrementan más allá de p, los valores de z serán positivos o negativos, hasta llegar al valor $x = q$, en cuyo caso nuevamente $z = 0$. Por tanto es necesario, ya que los valores del movimiento de z son desde 0 hasta 0, en medio, z tendrá o bien un valor máximo o mínimo (Euler 1755, p. 657-658).

Euler había demostrado anteriormente que los valores de x que hacen máxima o mínima la función z son las raíces de la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)\,Ax^{n-2} + \cdots = 0,$$

y así podría seguir la discusión:

> Dado que entre dos raíces reales cualesquiera de la ecuación $z = 0$ este es uno de los casos, la función z alcanza un máximo o mínimo, se deduce que si la ecuación $z = 0$ tiene dos raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ tiene necesariamente una raíz real. Igualmente, si la ecuación $z = 0$ tiene tres raíces reales, entonces la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ sin duda tiene dos raíces reales. Y, en general, si la ecuación $z = 0$ tiene m raíces reales, la ecuación $\frac{dz}{dx} = 0$ necesariamente tiene por lo menos $(m - 1)$ raíces. (Euler 1755, p. 660-661).

Esta presentación del Teorema de Rolle por Euler es bastante diferente de la de sus predecesores. Por un lado, por primera vez, con la ayuda del cálculo, no necesita del método de las cascadas, aunque sí se sigue manteniendo en el contexto de las ecuaciones polinómicas.

La siguiente versión, bastante más abreviada la encontramos en el *Traité de la résolution des équations numériques…* de Joseph Louis Lagrange (1736-1813):

> En primer lugar está claro que la ecuación $F(x) = 0$ de grado m tendrá m raíces reales y que la ecuación $F'(x) = 0$ de grado $m - 1$ necesariamente tendrá $m - 1$ raíces reales, ya que entre dos raíces reales consecutivas de la ecuación $F(x) = 0$, siempre hay una raíz real de la ecuación $F'(x) = 0$. (Lagrange 1798, Nota VIII, p. 12).

Aunque Lagrange hace referencia en párrafos anteriores a la Regla dada por Rolle, tal como figura en el *Algèbre*. Lagrange se refirió en este teorema a la propia versión dada por Euler en *Institutiones calculi differentialis* en su discusión posterior. Es decir, Lagrange no atribuye el teorema a Rolle en esta versión más moderna.

En años posteriores el teorema apareció en una serie de libros de texto sobre la teoría de ecuaciones, pero seguía sin ser asociado con Rolle. Según indica Cajori (Cajori 1911, 309), la primera persona que otorga el nombre de "Teorema de Rolle" es Wilhelm Drobisch (1802-1896). Drobisch, fue profesor de matemáticas en la Universidad de Leipzig y destaca "Sätze Rolle" en un libro de texto de 1834 (Drobisch, 1834, 179). Incluyendo una cita en la indica cómo la Nota VIII de Lagrange fue su fuente a pesar de que el propio Lagrange no la había asociado con él.

Seis años más tarde, François Moigno (1804-1884), profesor de matemáticas en College Sainte Geneviève de París, incluye la frase de "El teorema de Rolle" en el título de un artículo que trata sobre la determinación de las raíces (Moigno, 1840). Lo mismo hace el matemático e historiador de las matemáticas, Orly Terquem en 1844.

Poco tiempo después, Joseph Liouville (1864, 84) demostró una extensión del teorema para raíces complejas, y lo describió como "le Théorème celebre de Rolle". Sin embargo, según Cajori (1911, 309), debemos esperar hasta 1868, cuando el teorema se atribuye definitivamente a Rolle. Es a partir de una edición alemana del célebre *Cours d'algèbre supérieure* del Joseph Serret (1819-1885) cuando la asociación con Rolle se hizo más conocida.

Hasta mediados del siglo XIX, el Teorema seguía asociado a la resolución de ecuaciones y según indica Cajori (1911, 310) fue Pierre-Ossian Bonnet (1819-1892) quien asocia los dos teoremas fundamentales del Análisis: el Teorema del Valor medio y El Teorema de Rolle, aportando la demostración del primero a partir del segundo.

Y finalmente, es Charles Hermite (1822-1901) quien en 1873 utiliza el Teorema de Rolle en el contexto de la Teoría de series de Taylor dando la autoría del Teorema de forma clara a Rolle en su *Cours d'analyse*:

> "Cuando una función continua es igual a cero para dos valores x_0 y X, la derivada, si ella misma es continua, se anula para un valor comprendido entre x_0 y X.
>
> Esta última proposición, es decir, el teorema de Rolle, junto con las reglas de la aritmética y álgebra permiten calcular con facilidad las derivadas de las sumas, productos y potencias de funciones, es suficiente para determinar las series de Taylor (Hermite 1873, p. 48).

A inicios del Siglo XX volvieron a surgir ciertas dudas sobre la auténtica autoría de Rolle. Esto fue debido a que se había extendido entre los matemáticos únicamente la parte breve expresada en *Algèbre* y no la versión de *Démonstratio*… Finalmente, cuando Gustaf Eneström (1852-1823) afirma en un artículo en *Bibliotheca mathematica* (1906, 301-302), después de haber leído Reyneau (1708), que la lectura de *Démonstration*… era suficiente para despejar cualquier duda, el asunto sobre la autoría fue zanjado definitivamente.

CONCLUSIONES

En realidad, como se muestra la aportación de Rolle no contiene nada que tenga relación alguna con el recién nacido cálculo diferencial. De hecho el nombre de Michel Rolle en los textos sobre historia del análisis matemático solo figura como uno de los principales críticos respecto a las recién nacidas cantidades infinitesimales. Puede resultar sorprendente que uno de los principales teoremas del cálculo diferencial tenga su origen en el álgebra, y más sorprendente aún que el autor del mismo fuera una persona contraria al uso de tales técnicas.

Si se tienen en cuenta los orígenes hindúes del mismo dados por Bhaskara se observa que hay en él una componente intrínseca que tiende a este resultado final, a pesar de que la motivación que llevaron a Michel Rolle a formularlo, así como las técnicas utilizadas en su demostración, sean puramente algebraicas, por lo que esta "sorpresa" se transforma en una llamativa anécdota.

No debemos olvidar que en su proceso histórico, la mayor parte de la vida del teorema se ha mantenido en sus orígenes, como un teorema algebraico de gran utilidad en el campo del análisis. La transición del teorema desde álgebra hacia el análisis tiene su origen en la genialidad de Euler, y aun así, a pesar de la devoción que la comunidad matemática tenía de tan notable autor, el teorema tardó más de un centenar de años para convertirse en un resultado importante en el cálculo.

El hecho de que Serret y Hermite lo transformen en un resultado del análisis se comprende bien si se tiene en cuenta la obra del Serret y Hermite. El creciente interés en una correcta fundamentación de los principios del cálculo a finales del siglo XIX llevó a autores como Serret y Hermite a buscar y usar principios del álgebra como elementos esenciales de la teoría del análisis.

Concomitante a esta transición fue el creciente reconocimiento de Rolle como el autor original del teorema. Ahora bien, debido al creciente interés por el teore-

ma en el cálculo diferencial y abandono de sus orígenes del mismo, la asociación con Rolle también se ha alejado de sus orígenes. Es lamentable ver como el artículo sobre el Teorema de Rolle en Wikimatematica (y en libros de texto de bachillerato) indican versiones tan alejadas de la realidad como la siguiente:

> El teorema de Rolle, llamada así en honor del matemático francés Michel Rolle (1652-1719), quien publicó por primera vez el teorema de Rolle en un libro titulado "Méthode pour résoudre les égalitéz" en 1691. Sin embargo, tiempo después, se volvió un fuerte crítico de los métodos de su época y atacó de manera directa al cálculo. Su teorema decía lo siguiente: si una curva regular sale y llega a la misma altura, en algún punto tendrá tangente horizontal. Si la función empieza subiendo, tendrá luego que bajar para reencontrar su valor inicial, entre la subida y la bajada, hay un punto donde la función alcanza un máximo, y en éste, f ' se anula. Lo mismo sucede si la función empieza bajando, y f ' es nula en el mínimo de f."

Donde claramente se confunden versiones de unos y otros autores como se ha expuesto anteriormente.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Barrow-Green, J. (2009). From cascades to calculus: Rolle's theorem. En Eleanor Robson and Jacqueline Stedall (Eds) *The Oxford handbook of the history of mathematics*. 737-754. New York: Oxford University Press Inc.

Cajori, F. (1911). On Michel Rolle's book "Methode pour résoudre les egalitez" and the history of "Rolle's Theorem". *Bibliotheca mathematica*, 11, 300–313.

Cajori, F. (1993). *A History of mathematical notations*. (Two volumes bound as one.) New York: Dover publications, Inc.

Chabert, J. L. (ed) (1999). *A history of Algorithms.* Berlin: Springer.

Descartes, R. (1987). *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría*. Madrid: Ediciones Alfaguara.

Drobisch, M. W.(1834). *Grundzüge der Lehre von den höheren numerischen Gleichungen.* Leipzig.

Eneström, G. (1906). Kleine Mitteilungen. *Bibliotheca mathematica*, 7, 282–309.

Euler, L. (1755). *Institutiones calculi differentialis*. St Petersburg.

Gheverghese J. G. (1996.) *La Cresta del Pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas.* Madrid: Pirámide.

Goldstine, H. H. (1977). *A history of numerical analysis from the 16th through the 19th century*. New York: Springer Verlag.

Gua de Malves, A. J. P. (1741.a). Demonstrations de la règle de Descartes. *Memoires de l'Academie Royale de Sciences de París*, 72–97.

Gua de Malves, A. J. P. (1741b). Recherche du nombre des racines réelles ou imaginaires. *Memoires de l'Academie Royale de Sciences de París*, 435–495.

Hermite, C. (1873) *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*. Paris.

Kline, M. (1994). *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días*. Madrid. Alianza

Lagrange, J. L. (1798). *Traité de la résolution des équations numériques de tous les degrés*. Paris.

Mancosu, P. (1989) The Metaphysics of the Calculus: A Foundational Debate in the Paris Academy of Sciences, 1700-1706. *Historia Mathematica*, 16, 224-248.

Maclaurin, C. (1729). A second letter [...] concerning the roots of equations. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 36, 59–96.

Maclaurin, C. (1748). *A treatise of algebra, in three parts*, London.

Moigno, F. (1840). Note sur la détermination du nombre des racines réelles ou imaginaires d'une équation numérique comprises entre des limites données. Théorèmes de Rolle, de Budan ou de Fourier, de Descartes, de Sturm et de Cauchy. *Journal de mathématiques Pures et Appliquées*, 5, 75–94.

Reyneau, C. (1708). *Analyse demontrée ou la methode de résoudre les problêmes des mathematiques*. Paris.

Rolle, M. (1690). *Traité d'algebre*. Paris: Michallet

Rolle, M. (1691). *Démonstration d'une Methode pour resoudre les égalitez de tous les degrez; suivie de deux autres Methodes, dont la premiere donne les moyens de resoudre ces mêmes égalitez par la Geometrie, et la seconde, pour resoudre plusieurs questions de Diophante qui n'ont past encore esté resoluës*. Paris.

Smith, D. E. (1959). *A Source book in mathematics*. New York. Dover

Terquem, O. (1844) Théorèmes de Descartes, de Rolle, de Budan et Fourier, de Mm. Sturm et Cauchy deduits d'un seul principl. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3, 188–194, 209–213, 555–565, 577–580.

American Council of Learned Societie (1991). *Biographical dictionary of mathematicians* New York: Charles Scribner's sons.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 51-64*

Historia y didáctica: el caso del escrito de L'Hôpital *Analyse des Infiniment Petits pour L'intelligence Des lignes Courbes*

Luis Augusto Campistrous
Profesor titular de la Universidad Autónoma de Guerrero
Jorge M. López Fernández
Catedrático de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras
Celia Rizo Cabrera
Profesora titular de la Universidad Autónoma de Guerrero

Resumen: *En ninguna parte del famoso texto de L'Hôpital se demuestra la regla de la cadena, es decir, la regla para la diferenciación de funciones compuestas. En los escritos de análisis de Euler tampoco se ofrece demostración alguna o justificación para tal regla. En este artículo se afirma la naturalidad de la mencionada regla en el lenguaje de los infinitésimos y los diferenciales, propios de la época. Tal circunstancia hace la regla tan evidentemente válida, al punto de no requerir demostración explícita. Además, la regla fue concebida como algoritmo para calcular las derivadas de funciones que resultan de otras funciones diferenciables luego de efectuar sustituciones de variables, también diferenciables. Es anacrónico imaginar que la regla de la cadena según empleada en los escritos de L'Hôpital y de Euler tiene alguna relación con la composición de funciones. En la historia de la matemática la noción de composición de funciones surge al menos dos siglos después de la publicación del escrito de L'Hôpital. Finalmente, se argumenta la ventaja didáctica de presentar la regla de la cadena como un algoritmo para hallar la derivada (diferencia) de una función que se obtiene a partir de otra función diferenciable efectuando una sustitución de variables, también diferenciable.*

Palabras clave: *regla de la cadena, composición de funciones, infinitesimales, diferenciales, sustitución de variables.*

Abstract: *Nowhere in L'Hôpital's famous textbook is the chain rule (the rule for differentiating the composition of two functions) proved. It is neither proved or justified in any of Euler's analysis books. In this article the authors contend that this rule is obvious in the language of infinitesimals and differentials, common in L'Hôpital times. Such a circumstance makes the chain rule so clearly valid as to require no explicit proof. Furthermore, the rule was conceived as an algorithm for calculating derivatives of functions that are obtained from other differentiable functions by*

substitution of variables that are also differentiable. It is an anachronism to imagine that the chain rule as used in L'Hôpital's and Euler's writings has any relation with the composition of functions. In the history of mathematics, the composition of functions is defined at least two centuries after the publication of L'Hôpital's work. Finally, arguments are presented to document the didactic advantage of teaching the chain rule as an algorithm to find the derivative (difference) of a function that is obtained from a differentiable function by substituting a differentiable variable.

Keywords: chain rule, composition of functions, infinitesimals, differentials, substitution of variables.

INTRODUCCIÓN

A la escasa edad de 15 años Guillaume François Antoine L'Hôpital ganó notoriedad por haber resuelto un problema[1] planteado por Blaise Pascal relativo a la cicloide. Hoy día recordamos a L'Hôpital principalmente por la famosa regla del cálculo que lleva su nombre, la cual aparece por primera vez en su escrito *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes*, publicado en París en 1696 (véase [L'Hôpital, 1696, p. 145]). Sabemos que L'Hôpital fue un acaudalado ciudadano francés, quien ostentó varios títulos de nobleza (entre ellos el de Marqués de San Mesme), y quien se dice, aprendió el cálculo del matemático Suizo Johann Bernoulli entre los meses postreros del año 1691 y el mes de julio de 1692. Durante este período de tiempo L'Hôpital empleó a Bernoulli como su tutor de cálculo y también pactó con éste último un curioso arreglo financiero, mediante el cual, a cambio de una mesada, él pasaba a ser dueño de todos los descubrimientos matemáticos de Bernoulli. A pesar de tal arreglo, hoy día se piensa que L'Hôpital fue un matemático muy competente y de grandes méritos propios. Hoy sabemos que la famosa regla de L'Hôpital se debe realmente a Johann Bernoulli y que, de acuerdo a [Dunham, 2005, p. 36], lo mismo es cierto de gran parte del escrito de L'Hôpital. Bernoulli hizo múltiples apologías a favor de quien él llamó el "celebrado Leibniz" como inventor del cálculo, abonando así a la famosa polémica relativa a la invención de esta disciplina matemática. En el prefacio de [L'Hôpital, 1696] el autor reconoce "deber mucho a las lumbreras de los señores Bernoulli", en especial "al joven profesor de la Universidad de Groninga", refiriéndose particularmente a Johann Bernoulli. L'Hôpital puntualiza, además, refiriéndose a los dos hermanos Bernoulli así como a Leibniz, "haber empleado libremente sus resultados" y manifiesta no tener reparo alguno con que estos últimos reclamasen como suyos los resultados del escrito que quisieran y que él se contentaría con lo que "ellos tuviesen a bien dejarle". Sin embargo, el crédito otorgado a Bernoulli por L'Hôpital, parece no haber constituido suficiente reconocimiento para el primero, ya que de acuerdo a [Dunham, 2005, p. 36], Bernoulli terminó por acusar a L'Hôpital de haberse "lucrado del talento de otros". Tal acusación parecería un tanto curiosa siendo que Benoulli fue quién *literalmente* empleó su talento para lucrarse de L'Hôpital. Sobre esta misma polémica, comenta [Dunham, 2005], el

1. Sin duda, en compañía de otros.

afamado historiador de la matemática Dirk Jan Struik (véase [Struik, 1963]) hace una recomendación muy sucinta: "Dejemos que el buen Marqués conserve su elegante regla; después de todo él pagó por ella".

Figura 1
Portada de *Analyse des infiniment petits* y
figura de Guillaume François Antoine L'Hôpital

Es menester señalar que [L'Hôpital, 1696] es un texto de cálculo diferencial y que no incluye ningún tema de lo que hoy conocemos como cálculo integral. El propio L'Hôpital en el prefacio del escrito nos explica que su decisión de omitir el cálculo integral en su escrito surge a raíz de una carta que Leibniz le cursó en la que le indicaba su intención de publicar su trabajo corriente sobre el tema en un tratado que llevaría como título "De la ciencia infinita". L'Hôpital decidió entonces "no privar al público de esa fina pieza de trabajo" de Leibniz, en la que se discutiría "el método inverso de las tangentes aplicado a la rectificación de curvas, a la determinación de las cuadraturas de los espacios que ellas encierran, a la investigación sobre las superficies de los cuerpos que ellas describen, a la determinación de la dimensión de tales cuerpos[2] , al descubrimiento de sus centros de gravedad, etc". Otra observación importante sobre *Analysis des infiniment petits* es su parcialidad a favor del formalismo propuesto para el cálculo por Leibniz por sobre el de Newton. Manifiesta L'Hôpital que Newton también descubrió "algo parecido al cálculo diferencial" y que su "excelente *Principia*[3]", publicada inicialmente en 1687, "depende en su totalidad del empleo del cálculo mencionado". L'Hôpital agrega que la notación de Leibniz "es mucho más fácil y expedita [...que la de Newton...], sin mencionar la maravillosa ayuda que proporciona en múltiples ocasiones". Hoy sabemos que L'Hôpital manifestaba con tales palabras una conocida opinión de Johann Bernoulli, quien estuvo claramente parcializado a favor de Leibniz en la polémica relativa a la invención del cálculo. El escrito de

2. Entiéndase volumen.
3. Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica.

L'Hôpital fue determinante en la adopción del formalismo de Leibniz en toda la Europa continental. Como sabemos, esta es una de las principales razones que explica el desarrollo más acelerado del análisis en el continente europeo que en Inglaterra, donde se empleó el formalismo de Newton.

LA DEFINICIÓN DE DERIVADA EN *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS*

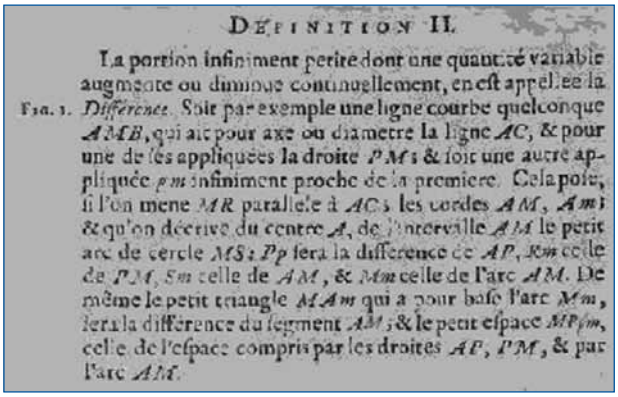
El análisis que se presenta en *Analyse des infiniment petits* es, como se manifiesta en (L'Hôpital, 1696), "un nuevo tipo de análisis distinto al *análisis común*". Explica L'Hôpital que el análisis común se ocupa del estudio de *cantidades finitas* mientras que el análisis de su escrito se "extiende al infinito" ya que trata sobre números infinitos, es decir, números infinitamente pequeños (infinitésimos) o infinitamente grandes. De acuerdo a L'Hôpital, Analyse des infiniment petits recoge métodos muy poderosos, los cuales no sólo superan marcadamente los métodos para el cálculo de tangentes de curvas empleados por Descartes, Fermat y Barrow, sino que también permiten descubrir la "verdadera naturaleza de las líneas curvas". En esta sección presentamos y comentamos los fundamentos del cálculo de L'Hôpital y examinamos su definición de derivada, llamada por él *diferencia* en (L'Hôpital, 1696, Definición II, p. 2), así como su definición de la tangente a una curva dada (L'Hôpital, 1696, Sección II, Definición, p. 11).

La Definición I de la Sección Primera de la Primera Parte del escrito de L'Hôpital define una (cantidad) *variable* como aquella que "aumenta o disminuye" continuamente y una (cantidad) *constante* como una que "continúa siendo la misma mientras otras cambian". En L'Hôpital (1969) se ofrece como ejemplo el de una parábola, y se dice que las abscisas y las ordenadas de la misma constituyen variables, mientras que el "parámetro" de la parábola es una constante. Desde luego, se infiere de esta definición, un tanto oscura, que podrían existir "dependencias" entre unas variables y otras, de suerte que, en principio, uno podría observar los cambios que las variables "dependientes" experimentan mientras las variables de las cuales dependen varían, es decir, aumentan o disminuyen.

La noción de variable fue precursora de la noción moderna de función, pero en la época de L'Hôpital tal noción no se había formulado aún, e incluso la forma moderna de expresar esta relación de dependencia entre unas variables y otras empleando funciones no existía. Poco menos de un siglo más tarde, en (Euler, 1748), se discute extensamente la noción de función[4] , aunque Euler no emplea la notación funcional. En los cursos introductorios de cálculo modernos aún se emplea este vocabulario y se dice, específicamente, que y es la variable *dependiente* y que x es la variable *independiente*. En la Definición II de L'Hôpital (1696, p.2) se dice que la *diferencia* de una cantidad variable es la porción "infinitamente pequeña" por la que aumenta o disminuye la cantidad; véase la Figura 2. Esto es lo más cercano que llega L'Hôpital a definir la derivada, es decir, para L'Hôpital una *diferencia* corresponde a lo que hoy día llamaríamos un *diferencial*, noción que, como

4. La noción euleriana de función según definida en [Euler, 1748, p. 4, 4] dista mucho de su versión moderna; véase, por ejemplo, la discusión en [Euler, 1748, p.8, 11] sobre "funciones biformes".

se sabe, está íntimamente relacionada con la noción de derivada. Empleando la notación funcional moderna, la diferencia de la variable $y=f(x)$, en símbolos dy, se define mediante la relación $dy = f(x+dx) - f(x)$, donde dx es un infinitésimo.



DEFINITION II.

La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en eſt appellée la
FIG. 1. *Difference*. Soit par exemple une ligne courbe quelconque *AMB*, qui ait pour axe ou diametre la ligne *AC*, & pour une de ſes appliquées la droite *PM*; & ſoit une autre appliquée *pm* infiniment proche de la premiere. Cela poſé, ſi l'on mene *MR* parallele à *AC*; les cordes *AM*, *Am*; & qu'on décrive du centre *A*, de l'intervalle *AM* le petit arc de cercle *MS*; *Pp* ſera la difference de *AP*, *Rm* celle de *PM*, *Sm* celle de *AM*, & *Mm* celle de l'arc *AM*. De même le petit triangle *MAm* qui a pour baſe l'arc *Mm*, ſera la différence du ſegment *AMS*; & le petit eſpace *MPpm*, celle de l'eſpace compris par les droites *AP*, *PM*, & par l'arc *AM*.

Figura 2
Definición de diferencia en *Analyse des infiniment petits*

Aunque, en general, dy es un infinitésimo, las variables en las que L'Hôpital está interesado son precisamente aquellas para las cuales el cociente dy/dx es *finito* para todo infinitésimo distinto de cero dx. Es menester apuntar que en L'Hôpital (1696, Art. 2 p.2) se toma como principio básico o supuesto el que afirma que en todo argumento matemático se podrá "emplear indistintamente cualquiera de dos cantidades que difieran una de la otra por un infinitésimo". Como se verá, este principio es fundamental en el cálculo de diferencias. La Fig. 1 a la que se hace referencia en la Definición II se ha incluido como la Figura 3 de nuestro escrito[5]. He aquí nuestra traducción de la Definición II:

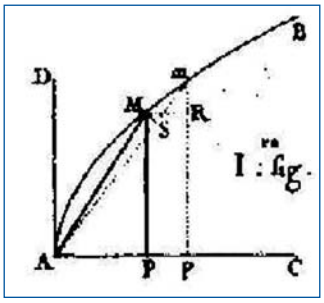


Figura 3
Figura asociada a la definición II de *Analyse des infiniment petits*

5. Por razones de índole tipográfica propias de la época, las figuras de *Analyse des infiniment petits* aparecen en páginas aparte, separadas del texto principal del escrito.

La porción infinitamente pequeña por la que aumenta o disminuye continuamente una cantidad variable se llama la *diferencia* de tal cantidad. Por ejemplo, sea AMB una línea curva cualquiera, la cual tiene como eje o diámetro la línea AC, sea la recta PM una de sus ordenadas y sea la recta pm otra ordenada infinitamente cerca de la primera. Así pues, si se dibuja el segmento MR paralelo a AC y se trazan las cuerdas AM y Am; y desde el centro A con distancia AM se describe el pequeño arco circular MS, entonces: Pp es la diferencia de AP, Rm la de PM, Sm la de AM, Mm la del arco AM. De manera análoga, el pequeño triángulo MAm teniendo como base el arco Mm será la diferencia del segmento AM y el espacio pequeño $MPpm$ será la diferencia del espacio contenido entre las rectas AP y PM y el arco AM.

Como corolario de la Definición II, L'Hôpital establece de inmediato que las diferencias de las variables constantes son cero y señala que habrá de reservar la letra *"d"* para denotar las diferencias en su escrito. Acto seguido L'Hôpital da nombre a todas las variables involucradas en la Definición II e indica la representación geométrica de cada una de ellas. Esta información se resume en forma tabular en la Figura 4.

El resto de la sección primera de *Analyse des infiniment petits* se dedica a la demostración de las reglas usuales de las diferencias. Por ejemplo, en el Problema planteado en la Proposición II (L'Hôpital, 1696, p.4), se demuestra la regla para calcular el producto de dos variables. Si se quiere calcular la diferencia del producto xy, se incrementa cada una de las variables en un infinitésimo y se calcula la diferencia:

$$(x + dx),\ (y + dy) - xy = xdy + ydx + dx,\ dy$$

Por el Artículo 1 (L'Hôpital, 1696, p. 4), la expresión de la derecha se puede sustituir por $xdy+ydx$ ya que esta última expresión difiere de la original por un infinitésimo, es decir,

$$(x + dx),\ (y + dy) - xy = xdy + ydx$$

y esta es la regla para determinar la diferencia de un producto. Expresado de otro modo,

$$d(xy) = xdy + ydx,$$

Para terminar esta sección comentamos sobre la definición de la recta tangente a una curva dada propuesta en L'Hôpital (1696, p. 11). Como se había indicado en la discusión de la Figura 3, las ordenadas PM y pm están infinitamente cerca la una de la otra y la recta tangente a la curva dada en el punto M se define como la prolongación del segmento infinitésimo Mm. En el caso en que tal recta corta el eje horizontal, digamos, en el punto T distinto de P, L'Hôpital demuestra que

$$PT = \frac{ydx}{dy}.$$

Variable		Diferencia		Descripción
AP	*x*	*Pp*	*dx*	abscisa
PM	*y*	*Rm*	*dy*	ordenada
AM	*z*	*Sm*	*dz*	longitud de radio vector
arco AM	*u*	*arco Mm*	*du*	longitud de arco
área APM	*s*	*área MPpm*	*ds*	área debajo de la curva en coordenadas rectangulares
segmento AM	*t*	*MAm*	*dt*	área en coordenadas polares

Figura 4
Tabla de las variables y las diferencias discutidas por L'Hôpital

Esto indica, desde luego, que en el caso descrito si uno de dx o dy son infinitésimos distintos de cero, también lo es el otro y dx/dy es *finito* y *constante*; comentarios análogos aplican a dy/dx. Hoy día, empleando el análisis no estándar (véase la Sección IV de este artículo), diríamos que todos los cocientes dy/dx para infinitésimos dx distintos de cero están infinitamente cerca de un número real único. Este número real se describe como la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto M definido según la discusión de L'Hôpital. Claro está, hoy pensaríamos en la curva dada como la gráfica de una cierta función, diferenciable en la abscisa del punto M. Empleando la notación funcional moderna, diríamos que la gráfica de la función[6] $y = f(x)$ tiene una recta tangente en el punto de su gráfica cuya abscisa es $x = c$ si existe un número real único $f'(c)$ (la pendiente de la recta tangente) tal que para todo infinitésimo dx tenemos que dy está infinitamente cerca de $f'(c)dx$; nótese que no hay que hacer excepción alguna con el caso $dx = 0$.

UNA OMISIÓN NOTABLE EN *ANALYSE DES INFINIMENT PETITS:* LA REGLA DE LA CADENA

Se pensaría que alguien con buena imaginación (y se presume, con cierta afición al pensamiento metafórico) dio el nombre de "regla de la cadena" a la regla de diferenciación de funciones compuestas. Supongamos que $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones que se pueden componer, es decir, que la función $y = f(u) \equiv f(g(x))$ existe (digamos) en algún intervalo abierto que contiene al punto $x = c$. Entonces el enunciado moderno más general de la regla de la cadena para funciones de una variable real es el siguiente:

Teorema 1 (Regla de la cadena) Si $u = g(x)$ es diferenciable en un punto x y $y = f(u)$ es diferenciable en el punto $u = g(x)$ entonces la función compuesta $y = f(g(x))$ es diferenciable en x y la siguiente relación se cumple:

6. O también, una función cuyas coordenadas x y y están dadas como funcionones de un parámetro t.

$$(f \circ g)^1(x) = f^1(g(x)) \cdot g^1(x); \quad (1)$$

aquí el símbolo "∘" es el usualmente empleado para designar la composición de dos funciones. El enunciado (1) es muy preciso ya que indica con toda claridad la dependencia de la derivada de la función compuesta $y = f(g(x))$ con las derivadas de cada una de las funciones dadas (es decir, $y = f(u)$ y $u = g(x)$) y, además, indica explícitamente dónde se evalúan tales derivadas. Más aún, (1) muestra que la derivada de la composición, pensada ésta como una "multiplicación", se transforma en el "producto" de las derivadas de las funciones individuales. Sin embargo, esta interpretación de la regla de la cadena no es aplicable a los escritos de L'Hôpital y de Euler. Quizás el lector moderno se sorprenda al saber que transcurrieron casi dos siglos antes de que la regla de la cadena se pudiese interpretar como una aseveración sobre la diferenciación de funciones compuestas.

La demostración de la regla de la cadena en el análisis que L'Hôpital llamaría "común" es una, sin duda, un tanto artificial. La demostración comienza bien desde el punto de vista didáctico, pero luego se torna un tanto artificiosa y poco intuitiva. Para los detalles supondremos que $y = f(g(x))$, $\Delta x \neq 0$, y que $\Delta u \neq g(x + \Delta x) - g(x)$. Entonces,

$$\frac{f(g(x+\Delta x)) - f(g(x))}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}, \quad (2)$$

y tomando límites en ambos lados de esta expresión cuando $\Delta x \to 0$, obtenemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}. \quad (3)$$

Esta es la regla de la cadena y en esta notación, la regla parece una relación trivial entre dos fracciones. Esta "demostración" parecería muy sugestiva y clara si no fuera porque adolece de un grave error: no podemos suponer que en la relación anterior que $\Delta u \neq 0$. A pesar de ello, la "demostración", no está falta de sutilezas teóricas, ya que para deducir (3) es necesario observar de paso que

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dy}. \quad (4)$$

El grave defecto de este argumento, dicho sea de paso, se puede "reparar" como hacen muchos textos modernos de cálculo. Sin embargo, como veremos, se podría decir que la "reparación" hace mucho menos natural a la prueba. Veamos. Empleando la misma notación, definimos la función

$$\varphi(\Delta u) = \begin{cases} \frac{\Delta y}{\Delta u} \text{ si } \Delta u \neq 0 \\ \frac{dy}{du} \text{ si } \Delta u = 0 \end{cases}. \quad (5)$$

Claramente,

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = \varphi(\Delta u) \quad \frac{\Delta u}{\Delta x} \qquad (6)$$

es siempre válida, ya que si $\Delta u = 0$, la relación se reduce a $0 = 0$ la relación , y de lo contrario es obvia. Por la continuidad de φ *en* $\Delta u = 0$, vemos que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \; . \quad (7)$$

De nuevo, (7) es la regla de la cadena.

Sin embargo en el "análisis infinito" de L'Hôpital la regla es harto evidente y apenas requiere explicación alguna. Si $y = f(u)$ y $u = g(x)$ son funciones diferenciables y "componibles" entonces, empleando la notación funcional y las definiciones introducidas anteriormente, tenemos

$$dy = (f(u + du) - f(u) \sim f'(u)du \sim f'(g(x))g'(x)dx; \quad (8)$$

aquí *du* y *dx* son ininitésimos y el símbolo "~" significa "estar infinitamente cerca de". En otras palabras, la regla de la cadena resulta muy natural y obvia, y parecería que la misma se reduce a un asunto de una mera "sustitución" de variables. Ciertamente el argumento presentado anteriormente como prueba de la regla de la cadena, parecería, por decirlo de algún modo, irrelevante e impertinente, y levanta un "falso" problema relativo a una división por cero. Ciertamente la demostración en el análisis de infinitésimos tiene un "aire" de mucha naturalidad y falta de sorpresas.

Algo que podría resultar sorprendente a un estudioso moderno de la matemática al leer a L'Hôpital (1696) es la ausencia total de la regla de la cadena en su escrito. En efecto, en *Analyse des infiniment petits* no hay discusión alguna sobre algún procedimiento equivalente a la regla. Ni siquiera merece comentario alguno su aplicación. Sin embargo, podría considerarse aún más insólito que en ningún lugar de Euler (1748 y 1755) aparece comentada o demostrada la regla de la cadena. A nuestro juicio, este dato, tan particular y curioso, es muy revelador ya que aporta al entendimiento del desarrollo histórico de la matemática en general y del cálculo en particular. Además, el dato lleva, como veremos, a reflexiones interesantes sobre la didáctica del Cálculo.

Parecería que la primera mención de la regla de la cadena en la literatura ocurre en la memoria inédita de Leibniz traducida por J. M. Child (Leibniz, 2005). En ella Leibniz indica como hallar $d(\sqrt{(a + bz + cz^2)})$ mediante la sustitución $x = a + bz\ cz^2$. Es esta memoria no hay demostración o explicación de la regla, e incluso hay varios errores en el cálculo de la diferencia ilustrada. Las ideas originales del cálculo de Leibniz aparecen publicadas en 1684 en una memoria de apenas seis páginas donde el presenta las ideas básicas de su cálculo, las reglas para calcular diferencias así como su definición de tangente. De acuerdo a Klein

(1972, p. 377), los hermanos Bernoulli comentan respecto al escrito[7] de Leibniz que el mismo constituye "un enigma más que una explicación".

La primera indicación del tratamiento peculiar de la regla de la cadena en *Analyse des infiniment petits* comienza en L'Hôpital (1696). En esta parte del escrito, L'Hôpital, además de definir la derivada de una variable (más bien, *la diferencia*, como señalamos antes), calcula las diferencias de sumas, restas, productos y cocientes de variables. Más adelante, se plantea el problema de calcular la diferencia de una potencia "perfecta o imperfecta" (es decir, entera o racional) cualquiera, y se demuestra la regla usual: $dx^r = rx^{r-1}dx$ para un exponente racional cualquiera r. Resulta entonces muy curioso que el primer ejemplo para ilustrar la aplicación de esta regla en el caso $r = 3$ es el cálculo de la diferencia de $(ay - x^3)^3$ (véase L'Hôpital, 1696, p. 9, Exemples). Desde luego, para completar este cálculo es necesario emplear la regla de la cadena, y L'Hôpital lo hace sin haberla comentado o demostrado antes. La relación (8), escrita en lenguaje moderno, nos hace ver que la demostración de la regla de la cadena es poco más o menos que trivial cuando se emplea el lenguaje de infinitésimos.

Claro está, la notación funcional aludida brilla por su ausencia en *Analyse des infiniment petits* y lo más sorprendente es que también ocurre lo mismo en Euler (1748, 1755). Sin embargo, en sus escritos Euler emplea constantemente el término "función" y dedica el primer capítulo al tema de las funciones en general (Euler, 1748). En los capítulos II y III de Euler (1748), se tocan los temas "Sobre la transformación de funciones" y "Sobre la transformación de funciones por sustitución" y esto es, hasta donde sabemos, lo más cercano que llega Euler a la noción de "composición" de funciones. En efecto, de acuerdo a Cajori (1929), el primer ejemplo del empleo de un símbolo especial para representar a una función de una cierta variable aparece en Bernoulli (1728) donde se emplea el símbolo "φ". También, en Bernoulli (1728), se escribe $dx:dy = \varphi\xi \pm c:a$; nótese que no se emplea paréntesis para delimitar el argumento de la función. Además, Cajori (1929) menciona que Euler empleó la expresión funcional siguiente:

$$f\left(\frac{x}{a} + C\right)$$

Cajori (1929) presenta otros ejemplos de D'Alembert y Euler relativos al empleo de este tipo de notación funcional para funciones de una y dos variables.

Es importante notar que ninguno de los ejemplos de Euler provienen de sus escritos más conocidos sobre el cálculo, es decir, de Euler (1748, 1755). En Euler (1755, p. 83) se explica "cómo hallar el diferencial de una potencia arbitraria cuyo diferencial podemos hallar". En esta discusión él emplea la regla de la cadena, al igual que hace L'Hôpital, sin presentar demostración o explicación alguna más allá de lo que ya se ha indicado. Es entonces prudente concluir que esta notación funcional era poco común en la época de L'Hôpital y de Euler y prueba de ello es el empleo de expresiones como la siguiente: "considere la función racional

7. Acta Eruditorum, 3, 1684, 467-473.

$(1 - z^2)/(z^2(1+z^2))\ldots$ " (Euler, 1748, p. 32). Claro está, en la última expresión no se indica dependencia alguna entre la variable z y la variable dependiente de z, la cual se omite por completo. Todo esto apunta a que la regla de la cadena, lejos de ser una regla para la diferenciación de la composición de funciones, como la entendemos modernamente, es más bien, una regla para manejar las *diferencias* de funciones que surgen de las sustituciones de ciertas expresiones en otras.

Al examinar a Cauchy (1821, p. 19) al comienzo del Capítulo I, el cual trata sobre el tema de las "funciones reales", vemos que se explica el empleo de la notación $f(x)$ o $F(x)$. Dice Cauchy que la notación "se empleará para designar una función explícita de una sola variable sin tener que determinar la naturaleza de tal función".

La definición moderna de función de Dirichlet se publicó en 1863 y, de acuerdo a Luzin (1940), la definición de Dirichlet[8], que aún se acepta hoy día, es la siguiente: "y es una función de una variable x definida en $a<x<b$ si a cada valor de la variable x en el intervalo indicado, corresponde un valor definido de la variable y.

Además, Dirichlet indica que la forma en que se establece la correspondencia de la definición entre una variable y otra es "totalmente irrelevante". Usualmente la variable y se conoce como la variable dependiente y la variable x como la independiente. En Luzin (1940) se hace una exposición muy lúcida sobre la relación que tiene la definición de Dirichlet con el trabajo sobre las soluciones a la ecuación de onda asociada a una cuerda vibrante realizado por Euler, Daniel Bernoulli y Lagrange, y además con el trabajo realizado por Fourier en 1807 relativo a la expansión de funciones como sumas de series trigonométricas. De la discusión queda meridianamente claro que las "transformaciones" y las "sustituciones" discutidas en Euler (1748), tardaron alrededor de un siglo en concebirse como "acciones" de funciones capaces de "componerse" unas con otras. Por ello, la interpretación de la regla de la cadena como una regla para la diferenciación de funciones compuestas es totalmente anacrónica y falta de realidad histórica cuando la misma se trata de aplicar a los escritos de L'Hôpital y Euler. Esta regla, se tomaba más bien como algoritmo para calcular diferencias de funciones que se transformaban mediante sustituciones de variables. Es posible que esta forma de discutir la regla en el contexto de los diferenciales de hoy día (según justificados por el análisis no estándar), provea alguna ventaja didáctica para comprender y aplicar la mencionada regla.

LOS NÚMEROS HIPERREALES Y EL ANÁLISIS NO ESTÁNDAR

Existe un sistema numérico, inicialmente desarrollado por el matemático Abraham Robinson, llamado "el sistema de los números hiperreales", el cual contiene

8. [Lakatos, 1977, p. 151] disputa tenazmente la adjudicación de autoría a Dirichlet de esta definición y critica severamente a E. T. Bell así como a Bourbaki por contribuir a la perpetuación de este falso rumor. En [Sánchez, Fernández, 2007, p. 142] se ofrece una explicación de la forma en que el estudiante de Dirichlet, Hermann Hankel, contribuyó a la difusión de esta historia.

al conjunto de los números reales y en el que el conjunto de los enteros positivos constituye un conjunto acotado. Este conjunto contiene números infinitamente pequeños o infinitésimos y también contiene números infinitamente grandes[9]. El análisis que se desarrolla con este sistema numérico se conoce como *análisis no estándar*; el análisis de los epsilones y los deltas desarrollado por Cauchy y otros, hoy se conoce como el *análisis estándar*. Los matemáticos que protagonizaron el desarrollo inicial del cálculo sólo tenían a su haber estas ideas de números infinitamente pequeños o infinitamente grandes y con sólo esto desarrollaron la gran mayoría de las ideas que hoy se estudian en los cursos de cálculo introductorio de las escuelas y universidades modernas. Por ejemplo, como se ha mencionado anteriormente, L'Hôpital propuso que en los argumentos del cálculo, dos cantidades cuya diferencia es un infinitésimo (es decir, que están infinitamente cercanas una de la otra) se pueden "tomar indistintamente una por la otra" (L'Hôpital, 1696, p. 2). También propuso que las "curvas" son "polígonos de un número infinito de lados" (L'Hôpital, 1696, p 3]). La idea de los infinitésimos fue central en el desarrollo del cálculo ya que convertía muchos de sus argumentos en unos sencillos y directos.

Ya hemos tenido ocasión de comentar sobre la idea de L'Hôpital al referirse a las virtudes del formalismo de Leibniz como vehículo para el "cálculo de diferencias". Queremos terminar presentando aquí el argumento no estándar para la demostración de la regla de la cadena. En el análisis no estándar se dice que la función $y = f(x)$ es diferenciable en x si para todo infinitésimo dx distinto de cero, el cociente $(f(x + dx) - f(x))/dx$ es un número finito[10] y el número real del cual está infinitamente cerca, $f^1(x)$, se conoce como la derivada de $y = f(x)$ en el punto x. Entonces, si $y = f(x)$ es diferenciable en algún valor de x, vemos que $f(x + dx) - f(x)$ está infinitamente cerca de $f^1(x)dx$ para todo infinitesimal dx. Así pues, el argumento para la regla de la cadena sería el siguiente:

> Sean $y = f(u)$ y $u = g(x)$ dos funciones capaces de "componerse", y suponga que g es diferenciable para un valor de x y f es diferenciable para el valor correspondiente de u = $g(x)$. Como y es una función, al mismo tiempo, de x y también de u, y como $dy = f'(u)du$ y $du = g'(x)dx$ tenemos

$$dy = f(u + du) - f(u) \sim f'(u)du = f'(g(x))du \sim f'(g(x))\, g'(x)dx.$$

Desde luego, esto dice que $f'(g(x))g'(x)$ es la derivada de $y = f(g(x))$. De algún modo, este argumento es, quizás, totalmente transparente, por lo que apenas merece escribirse de forma explícita.

9. Un número σ es un *infinitésimo* si $|\sigma| < r$ para todo número real positivo r. Decimos que H es un número *infinito* o *infinitamente grande* si $|H| > r$ para todo número real positivo r. En el sistema de los números reales no existen infinitésimos ni números infinitos.

10. Es decir, está infinitamente cerca de un número real único.

CONCLUSIÓN

La visión de la regla de la cadena como una regla relacionada a la composición de funciones es moderna (al menos, posterior a Cauchy), razón por la que no figuraba en absoluto en los esquemas teóricos de L'Hôpital o de Euler. Además, dada la total naturalidad de la regla en el lenguaje de infinitésimos y diferenciales, se podría argumentar que la misma no requirió justificación teórica alguna en los escritos de L'Hôpital y Euler. Posiblemente, la regla de la cadena se empleó como un algoritmo para calcular las derivadas (o diferencias) de las funciones que surgen como resultado de la sustitución de expresiones diferenciables en funciones que comienzan siendo diferenciables. Este punto de vista tiene una gran ventaja didáctica porque promueve una mejor comprensión de la regla de la cadena, ya que la sustitución de variables es una noción conceptualmente más manejable por los alumnos que la noción de composición de funciones (véase Santiago, 2008[11]).

Esta conclusión podría ser vista, desde un punto de vista más general, en cuanto al tratamiento actual de estos temas en la escuela y promover una reflexión, en el plano didáctico, sobre la conveniencia de volver a reconsiderar algunos de estos elementos del análisis no estándar en la concepción de dicho tratamiento.

Los autores están agradecidos por las conversaciones sostenidas con los profesores Robert Knighten de la Universidad del Estado de Portland, Oregon y la profesora Concepción Valdés de la Universidad de La Habana, Cuba quienes fueron de gran ayuda en la dilucidación de algunas de las sutilezas históricas y matemáticas de los temas que se tocan en este artículo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bernoulli, J. (1718). *Memoires d. L'acad. d. sciences de Paris. Opera* (Lausanne et Geneve, 1742), Vol. II, p. 243, 246, 250.

Cajori, F. (1928). *A History of Mathematical Notations Vol 1, Notations in Elementary Mathematics.* London: The Open Court Company Publishers.

Cajori, F. (1929). *A History of Mathematical Notations, Vol 1, Notations Mainly in Higher Mathematics*. Chicago: The Open Court Company Publishers

Cauchy, A. L. (1821). *Cours D'Analyse de L'École Royale Polytechnique*. Edición Facsimil. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Dunham, W. (2005). *The Calculus Gallery, Masterpieces from Newton to Lebesgue*. Princeton and Oxford: Princeton University Press

11. Algunas experiencias realizadas en el curso introductorio de cálculo no estándar en el Departamento de Matemática de la Universidad de Puerto Rico refuerzan la idea que son mayores para los alumnos las dificultades conceptuales asociadas a la comprensión de la operación de composición de funciones al compararselas con aquellas asociadas a la sustitución algebraica. En general, es más difícil para los estudiantes visualizar una función dada como composición de otras funciones más "elementales" que identificar sustituciones que a partir de una función básica y manejable llevan a funciones más complicadas.

Euler, L. (1840). *Comment. Petropol ad annos 1734-1785*, Vol. VII, Referencia tomada de J. Tropfke, op. cit., Vol. II (2d ed., 1921).

Euler, L. (1748). *Introductio in analysin infinitorum. Vol 1* (Introducción al análisis del infinito, Vol 1, Edición Facsimil- Sevilla: SAEM Thales -Real Sociedad Matemática Española.

Euler, L. (1748/1990). *Introductio in analysin infinitorum Vol 2*, (introduction to the Analysis of the Infinite, Book II). New York: Springer Verlag.

Euler, L. (1755/2000). *Institutiones calculi differentialis*. (Foundations of Differential Calculus). New York: Springer Verlag.

Kline, M. (1972). *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. New York: Oxford University Press.

Lakatos, I. (1977). *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*. New York: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1982). *Escritos Filosóficos*. (Traductor R. Torretti) Edición de Ezequiel de Olaso. Buenos Aires: Editorial Charcos.

Leibniz, G. W. (2005). *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*. (J. M. Child, tranlator). Mineola: Dover Publications.

L'Hôpital (1696). *Analyse des infiniment petits, Pour l'intelligence des lignes courbes*. Paris: L'Imprimerie Royale.

Luzin, N. (1940). *Function*. En La gran Enciclopedia Rusa, V. 59, p. 314-334.

Newton, I. (1686). *Mathematical Principles of Natural Philosophy and System of the World.* Vol 1 y Vol 2 (Traducción de Andrew Motte, 1729). Berkeley: University of California.

Sánchez, C. y Valdés, C. (2007). *Las Funciones; un paseo por su historia*. Madrid: Nivola.

Santiago, C. I. (2008). *Los números hiperreales y la comprensión del concepto derivada de una función en el curso de Cálculo*. Propuesta de disertación doctoral, Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Río Piedras.

Struik, D. J. (1963). *The origin of L'Hôpital's ruleMathematics Teacher*, vol. 56, p. 260.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 65-81*

La creación de la Real Sociedad Matemática Española: una mirada a nuestra matemática de aquella época

Javier Peralta
Universidad Autónoma de Madrid

Resumen: *Con motivo del centenario de la creación de la Real Sociedad Matemática Española, se examina en este artículo cuál era entonces nuestra situación matemática. También se estudia su estado posterior y la posible repercusión de la Sociedad en los años siguientes. Se concluye que la situación matemática española en aquel momento, aunque mejor que en las décadas anteriores, no se encontraba a un buen nivel, pero la creación de la Sociedad Matemática dio un impulso a nuestro desarrollo matemático posterior.*

Palabras clave: *Sociedad Matemática Española, centenario, matemáticas, historia de la matemática española.*

Abstract: *On the occasion of the centennial of the foundation of the Spanish Mathematical Society, we examine in this paper what was then our mathematical situation. Also, we study its previous state and the possible repercussion of the Society in the following years. We conclude that the mathematical situation in Spain at that moment, although better than in the previous decades, was not at a good level, but the foundation of the Mathematical Society gave an impetus to our posterior mathematical development.*

Key words: *Spanish Mathematical Society, centennial, mathematics, history of mathematics in Spain.*

INTRODUCCIÓN

En el último tercio del siglo XIX se percibe en España un impulso de renovación cultural y científica, bajo la influencia de la Institución Libre de Enseñanza y especialmente del ambiente regeneracionista surgido de la crisis del 98.

Las repercusiones de este movimiento intelectual se hacen sentir desde el mismo inicio del siglo XX con la creación del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, al que seguirán años después la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (1907) y la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (1908); todas ellas instituciones claves para nuestro despertar educativo y científico.

En 1911 nace la Sociedad Matemática Española (SME)[1], que ahora cumple su centenario; y junto a ella, la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1911-1917), a la que sucederá desde 1919 la *Revista Matemática Hispano-Americana*. En las siguientes páginas analizaremos, en su contexto científico, lo que supuso este acontecimiento crucial en nuestra historia matemática.

PROPÓSITO DEL ESTUDIO

El objetivo principal de este trabajo, realizado con ocasión de la conmemoración del centenario de la creación de la SME es, además de recordar cómo nació, conocer cuál era el nivel matemático en la España de entonces, así como la influencia de ese evento en nuestro ulterior desarrollo. Esto es, nos interesa saber en primer lugar, cómo se encontraba la matemática española anteriormente a la creación y, en particular, advertir si las instituciones surgidas en los primeros años del siglo influyeron en su progreso; en segundo, averiguar de qué manera se gestó el nacimiento de la SME; y, por último, conocer la situación de nuestra matemática entonces y años después, y si el hecho de la fundación de la Sociedad tuvo repercusiones en ese estado posterior.

En definitiva, partimos de la hipótesis de que la creación de la SME no fue un hecho aislado, y tratamos de incardinarlo en el contexto de la evolución de la ciencia española hasta ese momento: sus antecedentes, las posibles influencias y su proceso de gestación. Luego indagaremos, a través de su órgano de expresión: la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, cuál era nuestra situación matemática cuando se fundó y, finalmente, para apreciar mejor lo que significó este acontecimiento, y con la ayuda también, principalmente, de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, prolongaremos un poco más nuestro estudio en los años siguientes.

ANTECEDENTES

Suele considerarse que la polémica sobre la ciencia en España tiene su punto de partida a raíz de un artículo publicado por Nicolas Masson de Morvilliers en la *Encyclopédie Methodique* (1782), en el que llega a decirse que España *"quizá sea la nación más ignorante de Europa"* (Garma, 1988, p. 93).

¿Y a qué podría ser debida esa situación?

Una de las causas fundamentales estaba en la decadencia de las universidades, con planes de estudio anticuados y en donde era frecuente el absentismo de los catedráticos, las irregularidades en la provisión de cátedras mediante oposiciones de carácter local que juzgaba el propio claustro, la ausencia de investigación, e

1. El 12 de Enero de 1929 a la SME se le concedería el título de "Real", que ha conservado hasta nuestros días, excepto en los años correspondientes a la II República, en los que renunció a él (González y León, 2000, p. 367). Probablemente el título se otorgara a raíz del nombramiento de S.A.R. el Príncipe de Asturias de Presidente de Honor (Etayo, 1987, p. 28).

incluso de enseñanza experimental, el uso del latín como lengua docente, etc. Hay que tener en cuenta, además, que tanto en las universidades como en los demás centros educativos la enseñanza estaba mayoritariamente en manos de la Iglesia.

Ante este estado de cosas se toman ciertas medidas, que en realidad ya habían comenzado años antes de la denuncia de Masson. La primera es el intento de centralización de la enseñanza y su monopolio por el Estado. Asimismo se intenta disminuir la censura que, en efecto, quedará generalmente limitada a las obras de teología o filosofía (los tratados científicos suelen circular libremente). Otra disposición consiste en la contratación de profesores extranjeros de prestigio, aunque la mayor parte serían naturalistas, químicos o algún técnico, y no hubo entre ellos matemáticos o físicos destacables (Lagrange, por ejemplo, declinaría la invitación). Por último, se impulsa igualmente la creación de nuevas instituciones, entre las que se encuentran el Museo de Ciencias Naturales y el Jardín Botánico de Madrid, los Reales Estudios de San Isidro, el Instituto de Gijón, el Real Observatorio Astronómico, etc.

Los aires de renovación continúan durante los primeros años del siglo XIX, pero son paralizados bruscamente por la Guerra de la Independencia (1808-1814). Algunas muestras de esa interrupción son el suceso ocurrido en el Observatorio de Madrid, que es tomado como cuartel general de las tropas francesas, y sus archivos y la madera de su excelente telescopio Herschel (instalado en 1806) son empleados como combustible; o el saqueo y la destrucción por el ejército de Napoleón de numerosas obras de la Biblioteca del Monasterio de El Escorial[2].

Finalizada la guerra hay algún tímido intento de restablecer los daños causados, pero posiblemente ni siquiera llegaría a alcanzarse el estado científico anterior a la contienda. Y es que, salvo en el trienio constitucional (1820-1823), el reinado de Fernando VII, en el que se restaura la Inquisición, se cierran universidades y periódicos…, es una auténtica dictadura, en donde especialmente la ciencia sufre una seria persecución.

A la muerte del Fernando VII (1833), los gobiernos de Isabel II inician una nueva etapa para la educación y la ciencia en España. Desde el comienzo de la regencia de María Cristina (1833-1840) se crean nuevos centros e instituciones: las Escuelas de Ingenieros (la más importante de las cuales, la de Caminos, Canales y Puertos de Madrid, en 1834); la Real Academia de Ciencias Naturales de Madrid (1834), predecesora de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (1847); la primera Escuela Normal (1839)…

También se acometen importantes reformas educativas. En 1836 se decreta el Plan General de Instrucción Pública del duque de Rivas (Utande, 1964), aunque transcurrido un mes es paralizado al cambiar de Gobierno[3], aduciéndose que las reformas en la instrucción pública, según la Constitución de 1812, corresponden

2. Considerada como una de las mejores de Europa (alberga en su seno sesenta mil volúmenes y cerca de cinco mil manuscritos), siempre ha dedicado una especial atención a las matemáticas (Pascual, 1991).

3. En los siete años de la regencia de María Cristina, la Presidencia del Consejo de Ministros cambió catorce veces.

a las Cortes. Se realiza entonces un arreglo provisional para el curso 1836-1837, que no obstante estará vigente hasta 1845, cuando se establece el Plan Pidal. En éste, entre otras cosas, se crea la licenciatura en Ciencias, pero dentro de la Facultad de Filosofía, y se fundan los Institutos Provinciales de Segunda Enseñanza. Luego continuarán otros planes, hasta que en 1857 se promulga la Ley Moyano[4], en virtud de la cual tiene lugar la creación de las Facultades de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales (aunque inicialmente solo se pondría en práctica en Madrid), que surgen de la separación en dos (la otra es la Facultad de Filosofía y Letras) de la Facultad de Filosofía.

Asimismo empiezan a aparecer revistas científicas dedicadas a matemáticas y otras ciencias. Las primeras son el *Periódico Mensual de Matemáticas y Física* (nacida en Cádiz en 1848) y la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (Madrid, 1851, que desde 1904 cambiará el nombre por *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*), pero en las que prácticamente entonces no se encuentran aportaciones de matemáticos españoles.

Durante el sexenio democrático (1868-1874) cobra un mayor empuje el espíritu de renovación cultural, que de algún modo se mantendrá vigente en las siguientes décadas. Se producen reformas educativas inspiradas en el krausismo, y en 1876 nace la Institución Libre de Enseñanza (ILE), que tendrá una gran influencia en la creación, años después, de la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas y la Residencia de Estudiantes. Y este movimiento resurgirá con más fuerza con el ambiente de regeneración nacional fruto de la crisis del 98 desencadenada por la derrota militar, que retoma la vieja polémica sobre la ciencia en española, al tratar de señalar entre las causas del desastre nuestro retraso científico y tecnológico.

También nuestras matemáticas progresan en este último tercio de siglo. Aparecen nuevas revistas, aunque todas ellas de poca duración: la *Revista de la Sociedad de Profesores de Ciencias* (1874), *Crónica Científica. Revista Internacional de Ciencias* (1878), *El Progreso Matemático* (1892): nuestra primera revista exclusivamente matemática, etc.; y se empieza a dar a conocer en España la nueva matemática europea. Sin embargo, a pesar de ello, se estima que a finales de siglo nos encontramos con un retraso matemático aproximado de cincuenta años con respecto a los países más desarrollados, de modo que nuestra matemática está más cercana al Análisis de Cauchy o la Geometría de Staudt, por ejemplo, que a las teorías de Klein, Poincaré, Weierstrass o Cantor, entre otros.

Destacan entonces especialmente cuatro personajes: José Echegaray e Izaguirre, Zoel García de Galdeano y Yanguas, Eduardo Torroja y Caballé y Ventura Reyes y Prósper: son los matemáticos del 98 científico (los llamados *sembradores*). Echegaray es un ilustre ingeniero de Caminos, pero también físico-matemático, ministro de Hacienda y Premio Nobel de Literatura, que junto a Torroja, distinguido geómetra, creador de escuela y patriarca de una dinastía de insignes matemáticos, astrónomos e ingenieros, realiza su magisterio desde la Universidad de Madrid. Galdeano desarrolla su inestimable labor desde la Universidad de Zaragoza: se es-

4. Es la primera ley sobre Educación que hay en España (antes habían sido reales decretos u órdenes).

fuerza por modernizar la matemática y su enseñanza en España, asiste a congresos internacionales y es el fundador y director de nuestra primera revista matemática; mientras que Reyes, genio polifacético, pero que despunta especialmente en su investigación matemática[5] y se relaciona con algunos de los mejores matemáticos internacionales, ejerce su función desde su modesto Instituto de Toledo.

INSTITUCIONES DE PRINCIPIOS DEL SIGLO XX

Una de la repercusiones más importantes del espíritu regeneracionista es la creación del Ministerio de Instrucción Pública y Bellas Artes, que se dispone mediante un Real Decreto de 18 de Abril de 1900 firmado por la reina regente María Cristina en nombre el rey Alfonso XIII y a propuesta de Francisco Silvela, presidente del Consejo de Ministros.

Como es natural, el nacimiento del Ministerio supone un importante impulso para la educación en todos sus grados. En particular, una de sus primeras resoluciones es el establecimiento de la licenciatura en Ciencias Exactas, lo que implica otorgar un mayor peso a los estudios de matemáticas, que a partir de entonces serán siempre una carrera independiente. Se podrá cursar en las Universidades de Barcelona, Madrid y Zaragoza (el doctorado solo en Madrid), mientras que en las Universidades de Granada y Sevilla se impartirían los dos primeros cursos de cada sección de Ciencias.[6]

En 1907 sucede otro hecho relevante: el ministro de Instrucción Pública, Amalio Jimeno, funda la Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas (JAE), una institución que jugará un importante papel en nuestra historia científica. Para disponer y organizar sus actividades se nombra un Patronato, que preside Santiago Ramón y Cajal, y del que forman parte Menéndez Pelayo, Joaquín Sorolla, Rodríguez Carracido, Echegaray…, que elaboran un plan de modernización de la ciencia y la cultura españolas.

A pesar de numerosos problemas políticos[7] y presupuestarios, la JAE echa a andar, y desempeña su notable labor fundamentalmente en dos frentes: la promoción de estancias de estudios en el extranjero (algunos de los pensionados serán Ortega, García Morente, Zubiri, Blas Cabrera, Severo Ochoa, Laín Entralgo…, junto a los matemáticos Rey Pastor, Álvarez Ude, Esteban Terradas…) y la creación de Institutos de Investigación. De estos últimos, sus dos grandes núcleos serán el Centro de Estudios Históricos, que agrupa a lo que hoy denominaríamos

5. Reyes es el único matemático español que publica en el siglo XIX en una revista extranjera de calidad (*Mathematische Annalen*), aunque se trate tan solo de dos breves notas sobre geometría proyectiva (Peralta, 2009).

6. Anteriormente las Facultades de Ciencias se dividían en tres secciones: Físico-matemáticas, Físico-químicas y Naturales, pero con la creación del Ministerio se reorganizan en cuatro: Ciencias Exactas, Ciencias Físicas, Ciencias Químicas y Ciencias Naturales.

7. La creación de la JAE se publica en la *Gaceta de Madrid* de 15 de Enero de 1907, con un gobierno a cargo de los liberales; pero a los pocos días (25 de Enero) será sustituido por un gobierno conservador (presidido por Antonio Maura y con Rodríguez San Pedro de ministro de Instrucción Pública), que mirará con desconfianza a un organismo con un ideario próximo a la ILE.

Ciencias Sociales y Humanidades, y el Instituto de Ciencias Físico-Naturales, cada uno con varias secciones. Entre ellas cabe destacar para el propósito de este trabajo, el Laboratorio Seminario Matemático, que nacerá en 1915, y del que volveremos a hablar más adelante.

Asimismo, en 1908, se crea la Asociación Española para el Progreso de las Ciencias (AEPC)[8]. La propuesta de fundación surge por iniciativa de la Sociedad Española de Historia Natural, cuyo presidente, Luis Simarro, se dirige en 1907 a Segismundo Moret, ex-presidente del Gobierno y presidente del Ateneo Científico, Literario y Artístico de Madrid, quien impulsa su proyecto y consigue su fundación en 1908. Consta de siete secciones: Ciencias Matemáticas; Astronomía y Física del Globo; Ciencias Naturales; Ciencias Sociales; Ciencias Filosóficas, Históricas y Filológicas; Ciencias Médicas y Ciencias de Aplicación; y su finalidad es: *"el fomento de la cultura nacional en sus manifestaciones científicas principalmente"*, para lo que *"organizará Congresos, conferencias y concursos, procurará la fundación de instituciones de enseñanza…"* (Estatutos de la Asociación, 1909, p. 37).

Así pues, la JAE, productora de ciencia, se complementará con la AEPC, difusora de esa ciencia fundamentalmente en congresos, que se celebrarán en Zaragoza (1908), Valencia (1909), Granada (1911)…, cada uno organizado en sus correspondientes secciones. Concretamente, en la sección de Ciencias Matemáticas de dichos congresos se desarrollará una importante actividad y se presentarán diversos trabajos, entre los que destacarán especialmente los debidos a García de Galdeano y Rey Pastor.

Nos adelantamos ahora a mencionar a algunos de los matemáticos más destacados de estos años, varios de ellos aún no citados pero que aparecerán en las próximas páginas, y que van tomando el relevo de los *sembradores*. Son Luis Octavio de Toledo y Zulueta, Cecilio Jiménez Rueda, Miguel Vegas Puebla-Collazo, José María Plans y Freire, José Gabriel Álvarez Ude, Esteban Terradas e Illa, y Julio Rey Pastor, auténtico forjador de escuela, que se convertirá en su líder. Ellos recogerán la semilla de la generación anterior y la harán fructificar (Peralta, 2005).

GESTACIÓN, NACIMIENTO Y PRIMEROS PASOS DE LA SOCIEDAD MATEMÁTICA ESPAÑOLA Y SU REVISTA

Con anterioridad a 1911 habían surgido fuera de nuestro país diversas asociaciones de profesores de matemáticas (Gutiérrez, 1991), como la *Association for the improvement on Geometrical Teaching* (1871, Reino Unido) o *Mathesis* (1895, Italia), y poco a poco también se va percibiendo en España la necesidad de la existencia de una asociación de ese tipo. Así, en el número I(1) de la *Revista Trimestral de*

8. El asociacionismo europeo surge en Alemania en 1822, pero en España no comienza hasta medio siglo después, debido no solo a nuestro atraso científico, sino también a su especial situación política y social, ya que hasta la Constitución de 1869 no se establece el derecho a asociarse *"para todos los fines de la vida humana que no sean contrarios a la moral pública"* (Esteban, 1977, p. 237). Nuestras primeras sociedades científicas son la Sociedad Española de Historia Natural (1871), la Sociedad Geográfica Española (1876)…

Matemáticas (1901, p. 27), y con ocasión de una reseña sobre un congreso matemático organizado por *Mathesis*, se lamentaban *"que en España no haya Congresos ni Asociaciones de Matemáticos"*, para concluir: *"¡Así está su enseñanza!"*.

Pero lamentaciones aparte, ¿cómo se crea concretamente la SME? Su gestación sucede del siguiente modo:

- En el número I(1) de la *Gaceta de Matemáticas Elementales* (1903), Octavio de Toledo, catedrático de Análisis matemático de la Universidad Central, escribe una carta abierta al director de la revista, Ángel Bozal Obejero, catedrático de Matemáticas del Instituto de Vitoria, en donde expresa la *anemia matemática* de nuestro país y propone la creación de una colección de versiones españolas de las mejores obras matemáticas internacionales.
- García de Galdeano, catedrático de Cálculo infinitesimal de la Universidad de Zaragoza, contesta dos meses después en el número I(3) de la revista coincidiendo con el diagnóstico de nuestra situación y con la necesidad de una biblioteca en español, pero añade que la causa principal del problema es el estado de nuestros planes de estudio superiores, y aboga por una reforma en la línea de los vigentes en Francia, Alemania, EEUU…
- Pocos meses después, David Fernández Diéguez, repetidor de Matemáticas (!) en la Escuela de Artes e Industrias de La Coruña, y más tarde catedrático del Instituto de esa ciudad, en el número I(7) de la revista, apoya lo dicho por Octavio de Toledo y propone la fundación de una Sociedad Española de Matemáticas, a semejanza de lo que ocurre en Francia, EEUU, Rusia o Japón[9].
- Lauro Clariana Ricart, catedrático de Cálculo infinitesimal de la Universidad de Barcelona, en el número I(11) de esa misma revista, en un pintoresco artículo rechaza la opinión vertida en las cartas anteriores sobre nuestro pasado matemático, sosteniendo que en España sí se conocen las nuevas teorías matemáticas, y que no todas las ideas que nos llegan de fuera son las mejores.
- José de la Peña Borreguero, catedrático de Matemáticas del Instituto de San Sebastián, en el número II(2) de la *Gaceta de Matemáticas Elementales* (1904, pp. 52-54) extiende el problema no sólo al medio universitario, sino también al de la segunda enseñanza, en donde aún se hace más patente nuestro bajo nivel matemático, y se reafirma en la necesidad de fundar la Sociedad Española de Matemáticas, como *"único camino para conseguir tan legítimas y honrosas aspiraciones"*.
- Luis Sánchez de la Campa, teniente coronel de Ingenieros, en el número II(5) de la revista, abunda en la conveniencia de la creación de la Sociedad, detallando además las características que a su juicio debería tener.

9. Pone como ejemplo, concretamente, a la Association francaise pour l'avancement des sciences. Nótese que cinco años después de esta propuesta nacería en España la AEPC.

– A Cecilio Jiménez Rueda, catedrático de Geometría métrica de la Universidad Central, y a Octavio de Toledo, en el número II(6,7,8) de la revista les parece muy buena la idea de la fundación de la Sociedad, a la vez que retoman la propuesta a partir de la cual se inició este debate: la edición de una *Biblioteca matemática clásica*.

Transcurridos unos años desde la correspondencia anterior, en la sección de Ciencias Matemáticas del I Congreso de la AEPC celebrado en Zaragoza (1908), su vicepresidente, el general Manuel Benítez Parodi, pronuncia el discurso inaugural, y al final del mismo manifiesta la necesidad de crear una sociedad científica de matemáticos, según la idea planteada un lustro antes. Sugiere que acaso podría tomar como modelo la *Societé mathématique de France* y presenta las bases para llevar a cabo ese proyecto. La idea es aprobada por unanimidad.

Se constituye entonces una Comisión organizadora formada por Benítez, Octavio de Toledo, Jiménez Rueda y un joven Rey Pastor, en calidad de secretario (Hormigón, 1988), que elabora un proyecto, que después es patrocinado por Echegaray. En el marco del III Congreso de la AEPC, celebrado en Granada en 1911, se confirma la creación de la Sociedad, que será presidida por Echegaray y tendrá su sede en el Ateneo de Madrid. Junto con la Sociedad se funda la *Revista de la Sociedad Matemática Española*.

Los fines de la SME están recogidos en el número I(6) de la *Revista Matemática Hispano-Americana*[10] (1919, p. 197), continuadora de la anterior:

a) Establecer vínculos de unión entre los cultivadores de las Ciencias exactas en España y sus colegas extranjeros, especialmente de las Repúblicas hispanoamericanas.

b) Estudiar la organización de la enseñanza matemática en los diversos centros oficiales, proponiendo a los Poderes públicos las reformas convenientes, y colaborando en los trabajos de la Comisión internacional de Enseñanza.

c) Gestionar de autorizados especialistas series de conferencias sobre importantes cuestiones de las Matemáticas puras y aplicadas.

d) Organizar concursos varios entre estudiantes de Matemáticas, con premios y estímulos adecuados.

e) Procurar la divulgación de los estudios matemáticos mediante los medios que se estimen oportunos, como son: contratar la edición de notables obras matemáticas extranjeras y españolas, para cederlas a los socios a precio reducido; gestionar de los editores nacionales y extranjeros la concesión de rebajas a los socios, en la compra de obras matemáticas, etc.

f) Editar los trabajos de matemáticos españoles que por su mérito relevante sean acreedores de tal distinción.

10. La *Revista Matemática Hispano-Americana*, como se ha dicho, nace en 1919, y tiene dos series: la primera dura hasta 1925, y la segunda empieza en 1926 y continúa hasta nuestros días (desde 1985 con el nombre de *Revista Matemática Iberoamericana*).

g) Organizar una biblioteca y un consultorio bibliográfico que suministre a los socios noticias acerca de libros matemáticos, monografías y artículos de revistas existentes en Madrid.

En cuanto al propósito y contenidos de la revista, aparecen sintetizados a continuación de su título: *"Matemáticas puras y aplicadas. Cuestiones históricas y pedagógicas. Biografía y crónica científica"*.

El Tomo I comienza a editarse en mayo de 1911 y termina en julio de 1912, y consta de diez números, como todos los siguientes salvo el último (VI) que solo tiene dos. Y en cada número figuran, con ligeras variaciones, las siguientes secciones: "Biografías", "Sección doctrinal", "Notas matemáticas", "Artículos diversos", "Sección bibliográfica", "Crónica", "Vocabulario matemático", "Intermediario de los matemáticos" y "Sección de investigación".

En otro orden de ideas, se puede advertir que el nacimiento de la SME fue un acontecimiento recibido con gran entusiasmo por nuestra comunidad matemática. Veámoslo consultando la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, su órgano de expresión.

En el número I(1) de la *Revista de la SME* (1911-1912, pp. 21-25) aparece el conocido artículo "¡Sursum Corda!"[11], del comandante retirado Juan Jacobo Durán Loriga, que no creemos necesario reproducir[12]. Tan solo con observar su inicio: "*La creación de la Sociedad Matemática Española debe señalarse como piedra blanca en los anales de la Ciencia patria"*, y su final: *"No olvidemos que al propagar la Ciencia, y en particular la Matemática (la Ciencia por excelencia) es hacer Patria…"*, nos puede dar una idea del sentimiento tan caluroso con el que se celebra la creación de la Sociedad en nuestra vida matemática. Además, en el número I(6) de la revista figura la relación de socios (muchos de ellos colectivos), que son nada menos que 423, algo nada común para una sociedad científica, incluso ahora[13].

Sin embargo, enseguida surgen dificultades económicas para mantener la revista, como lo atestigua el curioso hecho que exponemos a continuación, y que indica además la especial consideración con que es tratada aquella. El primer número sale con 40 páginas, el segundo y el tercero con 36 cada uno, mientras que el cuarto vuelve a hacerlo con 40, y se anuncia en él que todos los restantes de este primer tomo constarán al menos de este número de páginas. Como se dice, la razón es que se ha hecho un donativo de 200 pesetas a la Sociedad por *un señor tan generoso como modesto, que oculta su nombre bajo las iniciales J. J. A.* (*Revista de la Sociedad Matemática Española*, 1911-1912, p. 138), para que se invierta en aumentar el número de páginas[14].

11. Esta expresión (¡Arriba los corazones!) fue utilizada con frecuencia en los años regeneracionistas.
12. Ha sido comentado entre otros por Peralta (1999, pp. 70-71 y 103-104).
13. El número se mantiene o incluso aumenta en los años siguientes: en el Tomo II (1912-1913) se dice que hay 471**;** en el Tomo III (1913-1914), 436; en el Tomo IV (1914-1915), 432…
14. Hay numerosos hechos recogidos en las páginas de la revista que hoy nos resultan igualmente curiosos. Citemos tan solo otro más en relación con la escasez de medios, aunque acontecido dieciocho años después, a raíz del nombramiento de Presidente de Honor al Príncipe de Asturias: la decisión de manifestar el agradecimiento y conceder una suscripción gratuita al dibujante Ángel Or-

ANÁLISIS DEL ESTADO DE NUESTRA MATEMÁTICA CUANDO SE CREA LA SOCIEDAD

Como ya se ha dicho, la primera revista existente en España dedicada solamente a las matemáticas es *El Progreso Matemático*, fundada y dirigida por García de Galdeano, con sede en Zaragoza, que se publicó de 1891 a 1896 (1ª serie) y de 1899 a 1900 (2ª serie). Entre ambas ediciones aparecieron *El Archivo de Matemáticas Puras y Aplicadas* (1896-1897) en Valencia, dirigida por Luis Gascó, y *El Aspirante* (1896-1897) en Toledo, fundada por Reyes y Prósper. Después de 1900 surgieron la *Revista Trimestral de Matemáticas* (1901-1906), editada en Zaragoza y dirigida por José Ríus y Casas, y la *Gaceta de Matemáticas Elementales*/*Gaceta de Matemáticas* (1903-1906) en Vitoria, debida a Ángel Bozal y Obejero.

Desde 1906, por tanto, no hay ninguna revista española exclusivamente matemática. Probablemente la mejor publicación científica existente entonces -aunque no solo matemática- fuera la *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, a la que habría que añadir las Actas de la *AEPC*, que obviamente no es una revista, pero que se editaban después de cada congreso de la Asociación. Queda clara entonces la oportunidad del nacimiento de la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, como único foro solamente matemático, tras cinco años sin existir, en donde se pudiera publicar.

Antes de analizar la *Revista de la SME* y tratando de situarla en su contexto, veamos cómo había evolucionado nuestra producción matemática en algunas revistas españolas desde mediados del siglo XIX hasta 1911-1912. Considerando el porcentaje de autores matemáticos españoles en la *Revista de los Progresos de las Ciencias Exactas, Físicas y Naturales* (en 1853 y en 1866), *El Progreso Matemático* (en 1892), la *Revista Trimestral de Matemáticas* (en 1901, salvo los tres primeros meses) y la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (mayo de 1911 a julio de 1912), se obtuvieron los siguientes resultados[15] (Peralta, 1999):

1853: 0%; 1866: 18,18%; 1892: 38,30%; 1901: 76,92%; 1911-1912: 95,56%

Lo que muestra cómo crecen las aportaciones españolas en ese periodo, hasta lograr que en el primer tomo de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* la casi totalidad de los autores sean de nuestro país. No obstante, si bien es cierto que los artículos en esta última son de una calidad algo mejor que las de años anteriores, generalmente continúan siendo de poco nivel. Veámoslo: como parece natural, para el análisis de los artículos no hemos considerado las contribuciones que figuran en las siguientes secciones de la revista: "Biografías", "Notas matemáticas" (son apuntes breves, y hay diez), "Sección bibliográfica" (se recensionan dieciocho libros, casi todos extranjeros), "Crónica" (información de congresos,

tiz, autor del diploma de nombramiento, *"por la moderación que hizo gala en sus honorarios"* (Peralta, 1999, p.74).

15. Ciertamente las cuatro revistas elegidas no son de la misma calidad y extensión ni tampoco se ha analizado siempre lo editado en un año exacto (nueve meses en la tercera y quince en la cuarta, como se ha indicado); aun así, creemos que los datos pueden darnos una razonable idea de la situación.

premios, fallecimientos…), "Vocabulario matemático", "Intermediario de los matemáticos" (foro en donde los socios plantean preguntas, en espera de respuestas, sobre matemáticas o su enseñanza) y "Sección de investigación" (problemas); sino tan solo las ubicadas en la "Sección doctrinal" (en donde se encuentran los auténticos artículos) y en "Artículos diversos" (trabajos sobre consideraciones matemáticas de tipo general o acerca de cuestiones históricas, pedagógicas…).

En la "Sección doctrinal" hay veintisiete artículos, de los que veintiséis son de españoles y tan solo uno de un matemático extranjero ("Sobre una propiedad de las cisoides y una generalización de estas curvas", de Gomes Teixeira), y en "Artículos diversos" los cuatro existentes son de españoles. Mostramos a continuación los títulos y el nombre de los autores de las aportaciones debidas a nuestros compatriotas: los cuatro primeros corresponden a "Artículos diversos" y los restantes a "Sección doctrinal" (como se indicará, algunas contribuciones se fragmentan en varios artículos):

1. "¡Sursum Corda!", J. J. Durán Loriga.
2. "La Historia de la Matemática pura en España", L. Octavio de Toledo.
3. "Algunas nociones matemáticas", Z. García de Galdeano.
4. "La Gramática y las Matemáticas", R. Pérez Barreiro (catedrático de Latín).

5-6. "Sobre la figura geométrica realizada por un hilo en movimiento estacionario plano" (2 artículos), E. Terradas.

7. "Sobre la sumación de series", J. Rey Pastor.
8. "Sobre el número de polígonos semirregulares", C. Jiménez Rueda.
9. "Arco de meridiano elíptico", E. León y Ortiz.
10. "Generalización del círculo de los nueve puntos", M. Vegas.
11. "Propiedades del Wronskiano", L. Octavio de Toledo.

12-13. "Algunos conceptos matemáticos aplicados a la Estadística" (2 artículos), G. Galán.

14. "Modo de reconocer si un número es divisible por otro de las formas $a\cdot10^n+1$ ó $a\cdot10^n-1$", R. Ayza.
15. "Homología de superficies de segundo orden", R. Araujo.

16-18. "Superficies helicoidales" (3 artículos), E. Torroja y Caballé.

19-22. "Ejercicios de Cálculo integral sobre determinación de volúmenes y áreas de superficies curvas" (4 artículos), L. Gaztelu.

23-26. "Estudio matemático de la estabilidad del aeroplano (4 artículos), C. Mataix.

27. "Orden y clase de una superficie alabeada", J. G. Álvarez Ude.

28. “El interés compuesto”, G. Galán.
29. “Geometría vectorial. Composición de vectores”, E. León y Ortiz.
30. “Armonía entre algunas líneas notables”, L. Clariana.

Pues bien; ¿se puede decir que son trabajos de investigación en consonancia con las teorías entonces actuales en Europa? ¿Tienen algo que ver, por ejemplo, con los espacios de Fréchet, la teoría de funciones de Borel o las paradojas de la teoría de conjuntos y la axiomática de Zermelo?... Creemos que no. Todos los trabajos corresponderían a un nivel académico de licenciatura universitaria o incluso alguno a enseñanza secundaria, salvo los artículos de Araujo, Álvarez Ude y posiblemente Terradas o Mataix (si bien, en general, tampoco tratarían precisamente de temas de actualidad).

O sea, es cierto que nuestro matemáticos ya se habían quitado el complejo de escribir en sus revistas, que había una gran ilusión por hacerlo (no se explicaría de otro modo que prácticamente todos fueran españoles) y que algunos pocos eran capaces de realizar trabajos de una relativa altura científica; pero la mayoría de los artículos no se encuentra al nivel que corresponde a una buena revista matemática de la época, homologable a las europeas.

A pesar de todo ello, no obstante, hay que decir que la revista creada con el nacimiento de la SME proporciona un importante impulso a nuestra matemática y a la estructura de una comunidad matemática que también quiere conocer de su pasado, constituir un foro de debate y recibir información sobre lo que se publica fuera de nuestras fronteras y de los congresos y otros eventos que se celebran en el exterior. Todo ello, en efecto, se recoge en las restantes secciones de la revista, pero nos vamos a centrar tan solo en dos de los aspectos mencionados: nuestra historia matemática y los congresos.

Respecto de lo primero, ciertamente, tanto en el Tomo *I* que estamos comentando como en los siguientes, se encuentran artículos de historia de las matemáticas y biografías de matemáticos, con especial interés en lo que concierne a nuestro país (véase por ejemplo el número 2 de la relación anterior). Pero además, en dicho tomo, se propone la elaboración de papeletas bibliográficas descriptivas del mayor número posible de obras de nuestro pasado matemático, retomando la idea expuesta por Octavio de Toledo en la *Gaceta de Matemáticas Elementales* en 1903, de las que él mismo, ahora, ya presenta algunas; labor a la que se sumarán otros socios en siguientes ejemplares de la revista.

En cuanto a los congresos y reuniones, se dan noticias no solo de los nacionales de la AEPC o de la SME, sino asimismo de las Congresos Internacionales de Matemáticos, a los primeros de los cuales, con sedes en Zurich (1897), París (1900), Heidelberg (1904) y Roma (1908), acuden únicamente entre uno y cinco españoles. Sin embargo, parece que debe remarcarse que el V Congreso, que se celebraría en Cambridge en 1912 y sobre el que se proporciona puntual información en la revista[16], los españoles asistentes pasarían a ser 25 y 2 Sras. (!); además, por

16. Como curiosidad digamos que desde las páginas de la revista, junto a la información del Congreso, la SME organiza un programa para asistir a él: viaje (de ida y vuelta en segunda clase), con

primera vez un compatriota, Esteban Terradas, presentaría en él una comunicación científica no centrada en temas de enseñanza[17]. En fin, no cabe duda que este aumento importante en el número de nuestros congresistas es debido al impulso producido por la creación de la SME o, si se prefiere, yendo más atrás, a la labor de la JAE y a la SME, como señala Curbera (2007).

NOTA SOBRE LOS AÑOS POSTERIORES

Al transcurrir el tiempo la categoría de los trabajos va mejorando, pero generalmente siguen siendo de inferior calidad a los de otras revistas punteras internacionales, y aún así suelen resultar elevados para la mayoría de los socios. Apenas un lustro después del nacimiento de la revista, lo denuncia Rey Pastor en el editorial titulado "A nuestros lectores", en el número V(41) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1915-1916, pp. 1-10), del que entresacamos lo siguiente: *"Nuestra Revista comparada con la de las sociedades matemáticas extranjeras tiene un nivel científico extraordinariamente bajo… Por el contrario para los de la casa, en general… resulta excesivamente elevada".* En fin, el caso es que la revista solo aguanta su publicación hasta 1917, cuando Rey se marcha a Argentina; pero en 1919, a su regreso, se edita una nueva: la *Revista Matemática Hispano-Americana*.

Hemos estudiado algunos tomos de esa revista, concretamente los correspondientes a 1921 y 1931 (esto es, diez y veinte años, respectivamente, después de la creación de la SME). En el primero de ellos, *Revista Hispano-Americana* (1921), el tono es generalmente más alto, y también los artículos de los autores españoles (que son la mayoría); por ejemplo: "Iniciación a la mecánica analítica" (F. Lorente de Nó) o "Integración de las ecuaciones entre derivadas parciales de segundo orden" (D. Marín), o también, "Sobre algunos principios de la teoría de conjuntos" (R. M. Aller), en donde se manejan cuestiones de actualidad, y se demuestra estar el corriente de las últimas aportaciones de Zermelo. Asimismo se encuentra algún trabajo de autoría española que, aunque no sea una aportación original, muestra al lector determinados temas de la matemática que se está haciendo entonces fuera de nuestras fronteras, como "Sobre el círculo de mayor radio en un recinto conexo", de R. Araujo, basado en otro publicado por W. Blaschke en Alemania en 1914. La calidad de la publicación se refuerza además con contribuciones de figuras extranjeras de primera línea, como Fubini o Einstein.

La *Revista Matemática Hispano-Americana* de 1931 es de igual modo española en su mayoría, y sus artículos son de cierta altura, como "Principios de la teoría de la correlación múltiple en general" (S. Cámara), "Sobre la teoría del campo único de Einstein" (J. M. Plans), etc. Hay además datos significativos de la calidad de la publicación y de su vocación de apertura al exterior, pues escribe por ejem-

estancia de dos días en París, dos en Londres y ocho en Cambridge, en buenos hoteles y con un guía que hable castellano en París y Londres, y a un precio inferior a 500 pesetas, saliendo de Madrid. Puede verse en el número I(5) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1911-1912, pp. 177-179).

17. En el mismo congreso otros matemáticos españoles presentarían trabajos en la sección de "Enseñanza Matemática".

plo Levi-Civita, y existen 97 revistas -todas extranjeras salvo 18- con las que hay intercambio, muchas de ellas de las mejores de entonces.

Por otra parte, desde finales de la segunda década de siglo nos visitan algunos de los más ilustres matemáticos europeos, como Hadamard (1919), Levi-Civita (1921), de la Vallée-Poussin (1921), Einstein (1923), Vito Volterra (1925)…, que pronuncian conferencias y mantienen relaciones con la SME, y muchos de los cuales escriben en la revista. Aunque, ciertamente, hay que decir que en los primeros años de andadura de la Sociedad no hubo tanto apoyo internacional. Con toda seguridad, el que nos brindó un mayor respaldo fue Francisco Gomes Teixeira (1851-1933), matemático portugués, rector de la Universidad de Oporto y nuestro primer Socio Honorario[18].

Dejando de lado las revistas hay que poner de manifiesto también la influencia de una importante institución ya mencionada: el Laboratorio Seminario Matemático (LSM), íntimamente ligado a la SME, y que será clave en nuestro progreso matemático.

El LSM tiene su origen en la noticia recogida en 1913 por Octavio de Toledo en la Revista de la SME de la reciente creación de un Laboratorio de Matemáticas en la Universidad de Edimburgo, y la propuesta de fundar uno similar en la Universidad de Madrid (aunque más bien se estaría pensando en un centro para la realización de cálculos con los aparatos entonces existentes, esto es, algo así como un Laboratorio de Cálculo). Ese mismo año la Sociedad organiza un ciclo de conferencias sobre matemáticas aplicadas, la primera de las cuales corre a cargo de José Ortega y Gasset, que incide en la función cultural de las matemáticas, destacando su influencia en el progreso de todas las ciencias y haciendo votos porque la SME lograra impulsar los estudios matemáticos en nuestro país, como se resume en el Tomo *III* de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1913-1914, pp. 116-117). El caso es que el ilustre filósofo se involucra también en la fundación de un centro motor de investigación matemática, y con su apoyo, y la gestión de Rey Pastor, se conseguiría que la JAE llevara a buen puerto finalmente la creación del LSM en 1915. Echaría a andar con entusiasmo en un pequeño local situado en los sótanos de la Biblioteca Nacional (Ríos, 1988), bajo la dirección de Rey; función que sería asumida cuando D. Julio marcha a Argentina (Peralta, 2006) por Álvarez Ude y Plans, a los que luego se unirá Terradas[19].

18. El acuerdo fue tomado en la sesión de 28 de junio de 1911, según se reseña en el número *I*(3) de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* (1911-1912, pp. 77-80), junto a un resumen de sus méritos. En realidad, la colaboración de Gomes Teixeira con la matemática española duró décadas y comenzó bastante antes de crearse la Sociedad [hemos encontrado un artículo suyo, "Sobre una propiedad de los focos de los óvalos de Cassini", en el número *I*(3) de la *Revista Trimestral de Matemáticas* (1901), y posiblemente haya algunos anteriores en otras revistas]. En particular, existen numerosos trabajos suyos en la *Revista de la SME* y en la *Revista Matemática Hispano-Americana*; y por ceñirnos tan solo a la primera, digamos que aparecen artículos de Gomes Teixeira en todos sus tomos, salvo en el último (que es notablemente más reducido). Concretamente, en los Tomos *I* (1911-1912) y *II* (1912-1913) es el único autor extranjero, en los Tomos *III* (1913-1914) y *IV* (1914-1915) le acompañan otros dos en cada uno de ellos (H. Brocard y L. Nowetcheski en el III y L. Nowetcheski y E. Pascal en el IV), y en el *V* (1915-1916), tan solo uno: R. Guimaraes.

19. Una referencia sobre ello puede verse en Peralta (2000).

Entre los principales objetivos del Laboratorio Seminario se encuentran tratar de estar al día sobre el desarrollo de la matemática y procurar su difusión, publicar trabajos originales o recensiones sobre artículos o libros que señalen nuevos rumbos, orientar y ayudar a quienes deseen realizar estudios matemáticos puros, invitar a matemáticos extranjeros a dar cursos en el Laboratorio, asesorar a la JAE acerca del envío de pensionados en el extranjero… (Sánchez Ron, 1990). En particular, el LSM participó en la creación de la *Revista Matemática Hispano-Americana*, conjuntamente, claro está, con la SME, además de editar las *Publicaciones del Laboratorio y Seminario Matemático*; y casi desde su creación se convirtió en nuestro centro de investigación matemático más importante. Concretamente, y ciñéndonos a la *Revista Matemática Hispano-Americana* en el período 1919-1936, de los 185 artículos de autoría española publicados en ella, 117 se desarrollaron en el LSM (el 63,24%), y de sus 70 autores, 28 pertenecían al Laboratorio (el 40%)[20]; cifras elocuentes para darnos una idea de la repercusión del LSM en nuestro desarrollo matemático posterior.

CONCLUSIONES

Durante el reinado de Fernando VII la matemática española se encuentra en un estado deplorable, y a pesar del movimiento de renovación cultural surgido a su muerte y especialmente durante el sexenio democrático, como también del ambiente producido por la crisis del 98, a finales de siglo nuestra matemática, aunque ciertamente ha mejorado, se encuentra todavía con cincuenta años de retraso, aproximadamente, respecto de la europea más desarrollada. Durante la primera década del siglo XX, fruto del espíritu regeneracionista, se crean tres instituciones (el Ministerio de Instrucción Pública, la JAE y la AEPC) que impulsarán la educación y la ciencia española y en particular favorecerán nuestro desarrollo matemático mediante la toma de algunas medidas tales como el establecimiento de la licenciatura en Ciencias Exactas, la salida de matemáticos pensionados al extranjero y la celebración de congresos. Precisamente en el I Congreso de la AEPC, celebrado en Zaragoza en 1908, y recogiendo la idea aparecida años antes en la *Gaceta de Matemáticas Elementales*, se acuerda fundar la SME, proyecto que se hará efectivo con gran entusiasmo en 1911, y que se encuadra en la historia del asociacionismo científico español (incorporado tardíamente al europeo).

Con la Sociedad se crea la *Revista de la Sociedad Matemática Española*, que va a jugar un papel fundamental en nuestra vida matemática, principalmente por tres motivos. En primer lugar, favorecerá el conocimiento de nuestra historia matemática, que se vierte en los correspondientes artículos y en la elaboración de papeletas bibliográficas descriptivas de obras de nuestro pasado matemático. En segundo, porque va a desempeñar una labor vertebradora de la comunidad matemática española, pues en sus páginas se informa de la celebración de sesiones, conferencias, fallecimientos, premios…, se crea un foro de debate sobre cuestiones matemáticas, se recensionan libros, revistas…, y, especialmente, se da a conocer lo

20. El más prolífico fue Rey Pastor, con 19 artículos. Para ampliar estos datos puede consultarse el artículo de del Pino Arabolaza (1988).

que sucede en el extranjero, mediante reseñas de publicaciones de fuera de nuestras fronteras, intercambio de revistas y noticias sobre congresos internacionales, a los que se anima a asistir (y se consigue). Por último, porque estimulará nuestra investigación matemática: los artículos de la revista serán mayoritariamente españoles, y su calidad, aunque todavía baja, irá aumentando poco a poco.

Este progreso en la calidad de nuestras aportaciones continuará en los años siguientes al nacimiento de la SME, como se observa en las páginas de la *Revista de la Sociedad Matemática Española* y la *Revista Matemática Hispano-Americana*. Y también participará de manera destacada en nuestro progreso matemático el LSM, creado en 1915 como Instituto de Investigación de la JAE, que se convierte en nuestro centro matemático de investigación más importante.

Podríamos decir como resumen, que en el momento de la fundación de la SME nuestra matemática, aunque había mejorado en las últimas décadas, todavía no estaba a un buen nivel. Pero que la Sociedad (y la influencia de la instituciones creadas en la primera década de siglo, y el LSM, después), junto a la labor de su revista, produjeron un notable progreso en nuestra matemática; de modo que transcurrido el primer tercio de siglo -la *Edad de Plata* de la cultura española- llegará a encontrarse a un nivel cercano al europeo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Curbera, G. P. (2007). Una mirada histórica a los International Congress of Mathematicians. Arbor, CLXXXIII(725), 363-371.

Durán, J. J. (1991). ¡Sursum Corda! *Revista de la Sociedad Matemática Española*, *I*(1), 21-25.

Estatutos de la Asociación (1909). En *Asociación Española para el Progreso de las Ciencias. Congreso de Valencia. 27 Octubre-3 Noviembre 1909*, I. Madrid: Imprenta de Eduardo Arias.

Esteban, J. de (1997). *Constituciones españolas y extranjeras*, I. Madrid: Taurus.

Etayo, J. J. (1987). 75 años de vida matemática (Conferencia de clausura), en *Actas de las XI Jornadas Hispano-Lusas de Matemáticas*, I, 23-42. Badajoz: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Gaceta de Matemáticas Elementales (1903): *I*(1), *I*(3), *I*(7), *I*(11) y (1904): *II*(2), *II*(5), *II*(6, 7, 8).

Garma, S. (1988). Cultura matemática en la España de los siglos XVIII y XIX. En Sánchez Ron, J. M. (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil*, 93-127. Madrid: CSIC/El Arquero.

González, F. A. y León, M. de (2000). Aproximación a la Historia de las Matemáticas en España. La Sociedad Matemática Española. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 3(2), 363-370.

Gutiérrez, A. (Ed.) et al. (1991). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

Hormigón, M. (1988). Las matemáticas en España en el primer tercio del siglo XX. En Sánchez Ron, J. M. (Ed.), *Ciencia y sociedad en España: de la Ilustración a la Guerra Civil,* 253-282. Madrid: CSIC/El Arquero.

Pascual, J. A. (1991). Presencia de la Matemática en el Monasterio de El Escorial. En *Seminario de la Historia de la Matemática*, I, 245-290. Madrid: Facultad de Ciencias Matemáticas, Universidad Complutense.

Peralta, J. (1999). *La matemática española y la crisis de finales del siglo XIX*. Madrid: Nivola.

Peralta, J. (2000). Sobre los maestros de Pedro Puig Adam. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 56, 41-54.

Peralta, J. (2005). Octavio de Toledo, la sucesión de los promotores de nuestro despertar matemático. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 8(2), 527-547.

Peralta, J. (2006). Sobre el exilio matemático de la guerra civil española. *Hispania Nova, 6,* 582-613. Reimpreso en Suma (2007), *56*, 11-21 y *Suma* (2008), *57*, 9-22.

Peralta, J. (2009). Rey, Reyes y la introducción de la lógica matemática en España. *Boletín de la Sociedad Puig Adam de Profesores de Matemáticas*, 83, 54-78.

Pino, P. del (1988). Incidencia del Seminario Laboratorio Matemático en la investigación española en Matemáticas. En Sánchez Ron, J. M. (Ed.), *La Junta para Ampliación de Estudios 80 años después*, II, 329-348. Madrid: CSIC.

Revista de la Sociedad Matemática Española (1911-1912): *I*, (1912-1913): *II*, (1913-1914): *III*, (1914-1915): *IV*, (1915-1916): *V* y (1917): *VI*.

Revista Matemática Hispano-Americana (1919): *I* (1ª serie), (1921): *III* (1ª serie) y (1931): *VI* (2ª serie).

Revista Trimestral de Matemáticas (1901): *I*(1) y *I*(3).

Ríos, S. (1988). Julio Rey Pastor (1888-1962). *Gaceta Matemática* (2ª serie), *1*(2), 129-135.

Sánchez Ron, J. M. (1990). Julio Rey Pastor y la Junta para la Ampliación de Estudios. En Español, L. (Ed.), *Estudios sobre Julio Rey Pastor (1888-1962),* 9-41. Logroño: Instituto de Estudios Riojanos.

Utande, M. (1964). *Planes de estudio de enseñanza media* (1787-1963). Madrid: Ministerio de Educación Nacional, Dirección General de Enseñanza Media.

¡Atrévete a ponerle nota!

CASIO ClassPad 330. La calculadora número 1 de su promoción.

Más de 500 aplicaciones gratuitas disponibles en internet.

Gran pantalla LCD con lápiz-táctil y menú de iconos + sistema CAS para álgebra simbólica + e-actividades como hojas de trabajo electrónicas y otras aplicaciones + rotación de gráficos 3-D + memoria flash de 5,4Mb.

CASIO

www.aulacasio.com

Entra en **www.aulacasio.com**

El aula donde más se aprende sobre las calculadoras CASIO: con información, descargas, actividades, publicaciones, ofertas, etc.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 83-97*

Revisitando los conceptos de máximo y mínimo a través del libro de L'Hôpital

María Teresa González Astudillo
Universidad de Salamanca

Resumen: *En este artículo se hace una revisión de los conceptos de máximo y mínimo tal como aparecen en el libro de L'Hôpital. La necesidad de este estudio se puede justificar por la pérdida del origen y sentido de los conceptos de Análisis Matemático que, tal como se tratan en la enseñanza actual se han algebraizado perdiendo el carácter geométrico-dinámico de sus orígenes. Para el análisis de estos conceptos se tienen en cuenta los aspectos epistemológicos, socio-culturales y didácticos que permiten caracterizar la forma en la que se presentan en este libro.*

Palabras clave: *libro de texto, historia de la matemática, máximos y mínimos, educación matemática.*

Summary: *This article presents a revision of maximum and minimum concepts such as they appeared in L'Hôpital's textbook. The necessity of this study is justified by the lost of the origins and sense of Analysis concepts, because in the actual instruction they are treated in an algebraic way instead of their original geometric-dynamical character. To analyze these concepts it has been taken into account the epistemological, socio-cultural and didactical aspects that permit characterized the way they look like in this book.*

Keywords: *textbook, history of mathematics, maximum concept, minimum concept, mathematics education.*

INTRODUCCIÓN

En el ámbito de la Didáctica de la matemática han sido numerosas las razones que se han dado para adentrarnos en el mundo de la historia de la matemática desde un punto de vista educativo. La mayoría de ellas inciden en que ésta debería estar presente en el currículo escolar por lo que actualmente, son muchos los libros de texto que incluyen alguna anécdota histórica, la biografía de algunos matemáticos o el desarrollo sucinto de algunos conceptos matemáticos con cierta intención motivadora (Bagni, 2001; Kleiner, 2001).

Los argumentos que justifican la importancia del papel que juega la historia de la matemática en su enseñanza, se pueden sintetizar en tres aspectos el filosófico o epistemológico, el filogenético y el histórico (Heeffer, 2006).

El primero incide en que la historia nos ofrece la posibilidad de una aproximación contextual a los conceptos distinta a la que se presenta en las aulas como productora de una "verdad eterna y absoluta"; conocer los estados por los que ha pasado una teoría antes de formalizarse, con sus períodos de inconsistencias y verdades a medias, desmitifica su naturaleza. El conocimiento de la historia puede ayudar a comprender mejor el sentido de los conceptos matemáticos e integrar la historia en la educación matemática nos permite colocar el desarrollo de las matemáticas en el contexto científico y tecnológico de un momento particular, en la historia de la ciencia y de las ideas.

El segundo aspecto da cuenta de las dificultades que han surgido a lo largo de la historia de la matemática relacionándolas con las dificultades que muestran los estudiantes en la comprensión de los conceptos lo que debe considerar el profesor para el diseño de la instrucción. Se han realizado algunas investigaciones en este sentido como por ejemplo, Sierpinska, (1985, 1987); El Bouazzoui, (1988), Sierra, González y López (1999, 2000), Czarnocha y otros (2001) que muestran que existe una estrecha relación entre las dificultades de los alumnos y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia.

Por último la revisión histórica nos permite descubrir los diferentes fenómenos con los que están relacionados los conceptos matemáticos, cuáles son los problemas que los originaron y las variadas heurísticas que permitieron obtener su solución. La historia de la matemática puede proporcionar formas de resolución de problemas diferentes de las utilizadas hoy en día. Esos procedimientos pueden ocultar el pensamiento que hay detrás de ellos "por eso, se debe realizar un ejercicio de descifrado para entender lo que se hizo, cuál fue el razonamiento que se oculta, y cuál es el sustrato matemático que hace que un método inusual sea válido y posiblemente general" (Arcavi e Isoda, 2007).

En este ámbito, esta investigación se desarrolló por una preocupación exclusivamente didáctica. En la literatura correspondiente a la investigación en educación matemática es ampliamente reconocida la dificultad que tienen los alumnos, en general, para comprender los conceptos del cálculo lo que les lleva a rutinizar la resolución de las actividades que se les proponen en el aula. Su pensamiento, en estos casos, es puramente algebraico y algorítmico mientras que, en muchas ocasiones, no llegan a realizar ningún razonamiento de índole analítica como correspondería a este tipo de conceptos. Esta preocupación nos llevó a estudiar la evolución que han sufrido estos conceptos a lo largo de la historia de la educación comenzando con el primer libro de texto exclusivamente de dedicado al cálculo como fue el libro de L'Hôpital (1696). Para centrar la investigación (González, 2002) nos fijamos en un concepto presente en toda la historia de la matemática como son los puntos críticos, concretamente los máximos y los mínimos y, en torno a estos conceptos, nos planteamos algunas preguntas relacionadas con los tres aspectos descritos en este apartado como: ¿Cómo se construyeron estos conceptos en la historia de la matemática? ¿Qué problemas dieron lugar a estos conceptos? ¿Cómo se abordaban inicialmente estos conceptos? ¿Cuál era el significado de estos conceptos?

DESCRIPCIÓN DEL ESTUDIO

El objetivo de este estudio es analizar los conceptos de máximo y mínimo presentes en el libro de L'Hôpital considerando los aspectos socio-culturales, epistemológicos y didácticos que determinan su configuración estableciendo las consecuencias que se puedan derivar en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Para llevar a cabo nuestro propósito realizamos una investigación de carácter descriptivo y cualitativo considerando los siguientes *puntos de interés* para caracterizar el texto analizado: contextualización de la obra e intencionalidad del autor, estructura del material, organización de los conceptos e interpretación heurística**.** La *estructura del material* nos ofrece una primera visión general de la obra concretada en cuestiones como la extensión, la secuenciación de los contenidos y nociones de los capítulos y las características relativas a la impresión o la presentación. La *contextualización de la obra e intencionalidad del autor* nos informa en primer lugar acerca del momento histórico en el que fue escrito el libro, las circunstancias que hicieron que fuera escrito en el modo en que ha llegado a nosotros, las repercusiones que tuvo en el mundo educativo y científico del momento; pero también nos proporciona información acerca de cuáles son los objetivos que se pretenden, la forma de ver el Análisis Matemático, las innovaciones que se introdujeron a partir de la obra así como la metodología de demostración usada. Para abordar el siguiente apartado, *organización de los conceptos*, se han descrito las definiciones, reglas de cálculo, tipos de problemas abordados y métodos de solución de dichos problemas.

Por último para realizar la *interpretación heurística* se ha considerado necesario, en función del objetivo de este trabajo, considerar tres aspectos: el **socio-cultural** que nos indicará la visión relativa al Análisis Matemático así como de la aplicabilidad de los conceptos, el **epistemológico** referente al status que se refleja en el material de los distintos contenidos desarrollados y, por último, el aspecto **didáctico** en el que se resaltarán aspectos relacionados con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, y en particular del Análisis Matemático. En los siguientes apartados iremos describiendo los resultados obtenidos a partir de la minuciosa revisión de este libro.

ESTRUCTURA DEL MATERIAL

Guillaume-François-Antoine, marqués de L´Hôpital (1661-1704) escribió el libro *Analyse des infiniment petits, pour l'intelligence des lignes courbes* siendo publicado en 1696 en París por De l'imprimerie royale. Se suele considerar como el primer libro de texto que se publicó de Análisis Matemático aunque, de hecho, sólo trata el cálculo diferencial. Se publicaron numerosas ediciones de él a lo largo de la mayor parte del siglo XVII y se utilizó como libro de texto en prácticamente todas las Escuelas Politécnicas, escuelas militares, Universidades y Academias.

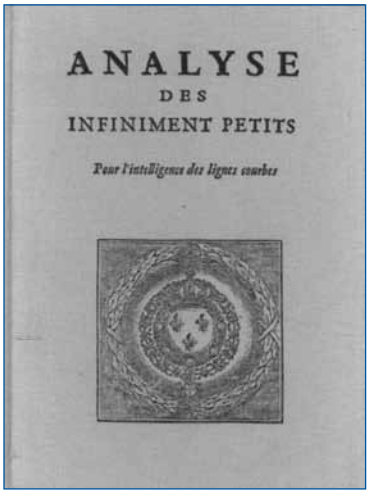


Figura 1
Portada del libro del L'Hôpital

La estructura de la obra es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que van a aparecer a lo largo del texto, se suceden las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión de ejemplificarlo.

La obra tiene 181 páginas y se divide en diez secciones a través de las cuales se hace un repaso de todo el cálculo diferencial. Desde los principios del cálculo de diferencias, el cálculo las tangentes a las cuestiones relativas a máximos y mínimos o los puntos de inflexión y de retroceso. También se descubre el uso de las envolventes de M. Hugens para todo tipo de curvas, se trata de cómo obtener cáusticas tanto por reflexión como por refracción y del cálculo de límites de forma indeterminada El libro finaliza con una observación en la que se indica que los métodos utilizados son generales y se pueden extender también a curvas trascendentes

Todas las proposiciones incluidas en el texto son muy generales porque, para L'Hôpital, los libros que contienen sólo proposiciones particulares no tienen ningún valor y su lectura sólo "faire perdre du temps à ceux qui les font" (p.ij) y es exclusivamente en la sección nueve donde presenta algunos problemas que, según su opinión, son "curieux, & qu'ils font très-universeles" (p. Ij). En el libro aparecen algunas aplicaciones a la Física, pero el mismo L'Hôpital, en el prólogo, dice que le hubiera gustado añadir una sección sobre el maravilloso uso que tiene el cálculo de diferencias en la física y la precisión que podemos lograr pero una enfermedad se lo impidió.

Como era al uso en la época, el libro contiene unas hojas desplegables del tamaño de página y media con las gráficas a las que se alude a lo largo del texto. La construcción de estas gráficas es la utilizada por Descartes en su *Geometrie* incluida en su

Discurso del método (1637), es decir, a partir de una línea recta vertical u horizontal (AC) que actúa de eje sobre el que varían las indeterminadas (coupées para L'Hôpital y abscisas para nosotros), se levantan líneas perpendiculares que corresponden a las llamadas aplicadas[1] (ordenadas en la nomenclatura actual). La notación relativa a la curva recuerda la utilizada para nombrar objetos geométricos como ángulos o polígonos indicando ciertos puntos notables (vértices) que determinan la figura en cuestión, en este caso los puntos AMB son puntos de la curva de forma que mientras M identifica un punto genérico, A hace referencia a un punto particular. De forma similar, las abscisas son segmentos AP siendo A, el origen de coordenadas. Debemos resaltar que se considera la noción de aplicada como una línea y no como una coordenada tal como entendemos actualmente, de esta forma, a medida que la aplicada varía sobre la curva, recorre el área que hay bajo ella. Para denotar ordenadas infinitamente cercanas a otras se utilizan las letras minúsculas, pm.

> Soit par exemple une ligne courbe quelconque AMB qui ait pour axe ou diametre la ligne AC, & pour une de ses appliquées la droite PM ; & soit une autre appliquée pm infiniment proche de la premiere. Cela posé, si l'on mene MR parallele à AC ; les cordes AM, Am &qu'on décrive du centre A, de l'intervalle AM le petit arc de cercle MS ; Pp sera la différence de AP, Rm celle de PM, Sm celle de AM, & Mm celle de l'arc AM. De même le petit triangle MAm qui a pour base l'arc Mm, sera la différence du segment AM ; & le petit espace MPpm, celle de l'espace compris par les droites AP, PM, & par l'arc AM. (p. 2)

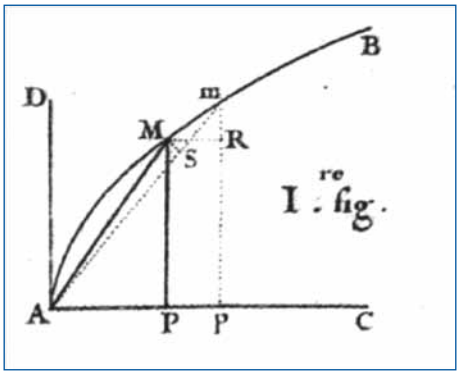


Figura 2
Gráfica de las diferencias de L'Hôpital

Hay que destacar que todas las expresiones utilizadas se refieren a familias de funciones, x representa la abscisa que varía AP, y, la ordenada correspondiente

1. Descartes los denomina *appliquées par ordre* o, en versión latinizada *omnes applicatae* (todos añadidos por orden) o abreviadamente *applicatae*. Así surgieron las palabras con igual significado *applicatae* y *ordinate* respectivamente. La primera cayó después en desuso. A partir de esta idea se acuñó en el siglo XVII la palabra abscissae (del latín *abscindere*, derivado de *scindere*, escindir, cortar).

PM, y a=AC es la magnitud del eje horizontal sobre el que se representa la función y que también interviene en la expresión simbólica.

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA OBRA E INTENCIONALIDAD DEL AUTOR

El Análisis infinitesimal moderno, como cuerpo de conceptos y resultados aplicables con cierta generalidad, nace a finales del siglo XVII, siendo considerados Newton (1643-1727) y Leibniz (1646-1716) como sus fundadores. Su origen se debe al interés ciertos problemas que se pueden clasificar en dos bloques (Grattan-Guinnes, 1984) según la materia de la que tratan: problemas mecánico-físicos y problemas geométricos. Los primeros hacen referencia a cuestiones como el tiro, la caída libre, el movimiento de los planetas, en general, todos los que requieran el estudio de los procesos de movimiento. El segundo tipo de problemas están relacionados con el cálculo de las tangentes y áreas, longitudes o volúmenes.

El cálculo de Newton y Leibniz eran radicalmente distintos, así, mientras el de que aquel era de carácter dinámico, Leibniz concebía las curvas como agregados de segmentos infinitesimales, lo que dotaba a su cálculo infinitesimal de un carácter básicamente estático.

En 1684 y 1686 Leibniz publicó sendos artículos en el *Acta Eruditorum* (revista científica fundada por él mismo) que, a pesar de presentar esta nueva rama de las matemáticas, no tuvieron mucha repercusión puesto que eran bastante breves, tenían erratas y eran difíciles de comprender. Los hermanos Bernoulli, Jacob (1654-1705) y Jean (1667-1748) estudiaron dichos artículos a partir de 1687, y en 1690 demostrando haber conseguido dominar los conceptos en ellos expuestos, lo que se puede comprobar a raíz de sus publicaciones en la misma revista *Acta Eruditorum*. El menor de los hermanos, Jean Bernoulli, conoce hacía 1692 al Marqués de L'Hôpital (1661-1704) estableciéndose entre ambos un contrato según el cual, a cambio de un salario regular, se comprometía a enviarle a L'Hôpital sus descubrimientos en matemáticas para que los utilizase según su voluntad[2]:

> I shall give you with pleasure a pension of three hundred livres, which will begin on the first half of the year, and I shall send two hundred livres for the first half of the year because of the journals that you have sent, and it will be one hundred and fifty livres for the other half of the year, and so in the future. I promise to increase this pension soon, since I know it to be very moderate and I shall do this as soon as my affairs are a little less confused… I am no so unreasonable as to ask for this all your time, but I shall ask you to give me occasionally some hours of your time to work on what I shall ask you –and also to communicate to me your discoveries, with the request not to mention them to others. I also ask you to send neither to Varignon nor to others copies of the notes that you let me have, for it

2. Se ha especulado durante mucho tiempo acerca de algún acuerdo que hubiera habido entre Bernoulli y l`Hôpital para la publicación de los resultados obtenidos por el primero de ellos, pero no ha sido hasta 1955 en que se publicó la correspondencia de Jean Bernoulli cuando se ha descubierto la existencia de este contrato realizado en 1694 entre ellos.

> would not please me if they were made public, Send me your answer to all this and believe me. Monsieur tout à vous (le M de L'Hôpital, citado en Historical Topics for Mathematics classroom, N.C.T.M. 1969).

Uno de los resultados de este acuerdo, fue la publicación del primer libro sobre Cálculo Diferencial, *Analyse des infiniment petits,* en París en 1696 en el que se recogen las enseñanzas recibidas por el marqués. Un ejemplo de esta colaboración es que se haya conocido como "regla de L'Hôpital" para límites indeterminados, una de las contribuciones principales de Bernoulli que data de 1694 y que apareció por primera vez en este texto.

Este libro según Cantoral (1995) se adapta al paradigma de la **etapa de difusión del saber**, caracterizada por "una especie de pedagogía impresionista que pretende en el lector evocar una serie de impresiones que contextualicen al concepto o campo de conceptos que el texto trasmite. Esto supone de quien lo lea un ejercicio mayor que aquel que se requiere para dar seguimiento a un razonamiento lógicamente encadenado. En cierto sentido solicita del lector una especie de joroba matemática que le permite, por así decirlo, leer entre líneas" (Cantoral, 1995). Esto podemos observarlo en las primeras definiciones incluidas en el libro, la primera de las cuales indica que:

> On appelle quantités variables celles qui augmentent ou diminuent continuellement; & au contraire quantités constantes celles qui demeurent les mêmes pendant que les autres changent. Ainsi dans une paraboles les appliquées & les coupées sont des quantités variables, au lieu paramètre est une quantité constante (p. 1).

En ella, se define lo que se entiende por cantidades variables y cantidades constantes pero no se explica el significado de "aumentan o disminuyen continuamente", con lo que se supone en el lector la noción de variación continua, como señalaba Cantoral.

El libro de L'Hôpital, se basa en dos postulados, en el primero se establece que se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña:

> I DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'on puisse prendre indifféremment l'une pou l'autre deux quantités qui ne différent entr'elles que d'une quantité infiniment petite; ou (ce qui est la même chose) q'une quantité qui n'est augmentée ou diminuée que d'une quantité infiniment moindre, qu'elle, puisse être considérée comme demeurant la même (p. 2).

Mientras que, en el segundo, se consideran las curvas como formadas por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva, de esta forma se expresa simplemente la manera en que concebían los matemáticos de aquella época las curvas, como la traza de un punto que la recorre.

> II DEMANDE OU SUPPOSITION. On demande qu'une ligne courbe puisse être considérée comme l'assemblage d'une infinité des lignes droites, chacune infiniment petit ou (ce que est la même chose comme un poligône d'un nombre infini de côtes, chacun infiniment petit, lesquels déterminent par les angles qu'ils font entr'eux, la courbure de la ligne (p. 3).

El primer postulado establece las reglas para el manejo algebraico, extendiendo la noción usual de igualdad, mientras que el segundo, lo hace en un contexto geométrico. Estos dos principios difícilmente se podrían considerar aceptables hoy, pero L'Hôpital los veía:

> D'allieurs les deux demandes ou suppositions que j'ai faites au commemcement de ce Traité, &sur lesquelles seules il est appuyé, me paroissent si évidentes, que je ne croy qu'elles puissent alisser aucun doute dans l'esprit des Lecteurs attentifs.

Tal como era al uso en la época, el *Analyse* comienza dando las definiciones de variable y de sus diferencias, así como postulados sobre estas diferencias y se obtienen las fórmulas de las diferencias básicas para las funciones algebraicas a la manera de Leibniz. La noción que tiene L'Hôpital de la diferencial es un poco diferente del de Leibniz. Las diferenciales de Leibniz son diferencias infinitamente pequeñas entre valores sucesivos de una variable; L'Hôpital, en cambio, no considera las variables como recorriendo una sucesión de valores infinitamente próximos, sino como creciendo o decreciendo de manera continua, y entonces las diferencias son las partes infinitamente pequeñas en que aumentan o disminuyen las variables. Así la definición de diferencia que se da es la siguiente:

> La portion infiniment petite dont une quantité variable augmente ou diminue continuellement, en est appellée la *Différence* (p. 2)[3].

En el libro de L'Hôpital se tratan por primera vez las magnitudes infinitas comparando las diferencias infinitas de las magnitudes finitas y descubriendo las razones entre estas diferencias. Además, este Análisis se extiende más allá del infinito, ya que sus límites no son las diferencias infinitamente pequeñas, sino que se descubren las relaciones de las diferencias de estas diferencias, alcanzando las diferencias terceras, las cuartas, etc.

En esta época de nacimiento, el Análisis Matemático consistía en una colección de métodos analíticos para resolver problemas sobre curvas, y los conceptos principales que se manejaban eran **cantidades geométricas variables**. Con el paso del tiempo a medida que se fueron haciendo más complicados los problemas y el manejo de las fórmulas más intrincado, el origen geométrico de las fórmulas se fue haciendo más remoto, y así el cálculo fue cambiando hasta convertirse en una disciplina que se ocupaba simplemente de las fórmulas con lo que se fue algebrai-

3. Hay que hacer notar que las expresiones anteriores están expresando diferencias infinitesimales y no como concebimos ahora el diferencial como variación infinitesimal de una variable respecto a otra, en cuyo caso estaríamos ante una razón o proporción.

zando. Es importante, además, hacer notar que es el estudio de esas diferencias tanto infinitamente grandes como infinitamente pequeñas, de lo que va a tratar esta rama de las Matemáticas, de ahí el nombre de Cálculo Diferencial.

PUNTOS MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA CURVA

La definición que se ofrece de puntos máximos y mínimos es una descripción del comportamiento de la curva en el entorno de estos puntos. Hace referencia a la concepción de curva como traza, es totalmente dinámica y la notación es estrictamente geométrica:

> Soit une ligne courbe MDM dont les appliquées PM, ED, PM soient paralleles entr'elles, & qui soit telle que la coupée AP croissant continüellement, l'appliquée PM croisse aussi jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle diminuë; ou au contraire qu'elle diminüe jusqu'à un certain point E, aprés lequel elle croisse. Cela posé, La ligne ED sera nommée *La plus grande,* ou *la moindre* appliquée (p. 41).

Dicha definición se da a partir de la construcción de una curva, y en ella se observa la concepción de L'Hôpital como ordenadas que crecen o decrecen continuamente en función de las abscisas, con lo que tiene un carácter fundamentalmente **geométrico-dinámico** basado en la descripción del comportamiento de la curva en un entorno del punto. A partir de esta definición se establece en qué consisten los problemas de máximos y mínimos consisten:

> La nature de la ligne courbe MDM étant donnée; trouver pour AP une valeur AE telle que l'appliquée ED soit la plus grande ou la moindre de ses semblables PM. (p. 41).

Se establecen dos métodos para el cálculo de los máximos y los mínimos. El primero de ellos está relacionado con la noción de tangente y se configura a partir de un discurso descriptivo y la noción de *diferencia.* El razonamiento se basa en que cuando la variable (dependiente) aumenta la **diferencia** es positiva (crecimiento de la función), mientras que si disminuye, la **diferencia** será negativa (decrecimiento de la función) y para que la diferencia pase de positiva a negativa o viceversa la diferencia ha de ser cero o infinito, por lo que la conclusión a la que se llega es:

> D'où il fuit que la différence d'une quantité qui exprime un *plus grande* ou un *moindre*, doit être égale à zero ou à l'infini (p. 42).

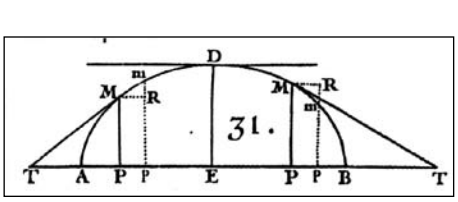
Es decir, hay que calcular los puntos en los que la **diferencia** de L'Hôpital es cero por lo que en ellos la tangente a la curva es horizontal o, aquéllos en los que dicha diferencia sea infinita y, por lo tanto, la tangente será vertical.

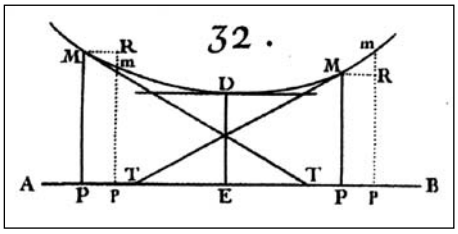
El otro método se configura a partir de éste y se basa en la noción de subtangente ya que la variación que sufre esta subtangente a medida que la abscisa se

aproxima al máximo o al mínimo, se puede utilizar también como indicador de los puntos en cuestión. Cuando la variable se acerca por la izquierda al máximo o mínimo, la subtangente aumenta hasta alcanzar infinito en dicho punto y posteriormente disminuye. En ningún momento se establece un criterio para distinguir los máximos de los mínimos como el que se utiliza ahora con la derivada segunda.

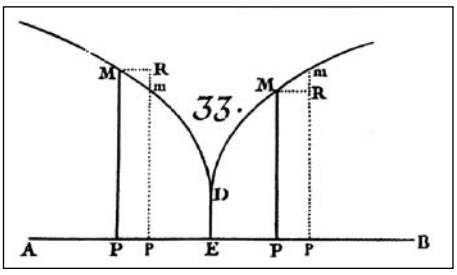
> C'est-porquoy pour aider l'imagination, soient entenduës des tangents aux points M, D, M; il est clair dans les courbes où la tangent en D est parallele à l'axe AB, que la soutangente PT augmente continüellement à mesure que les points M, P approchent des points D, E; & que le point M tombant en D, elle devient infinie; & qu'enfin lorsque AP surpasse AE, la soutangente PT devient negative de positive qu'elle étoit, ou au contraire (p. 42).

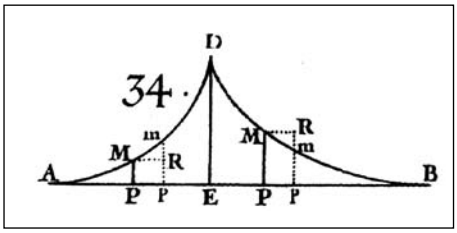
Las gráficas que se utilizan para ilustra la situación son de tipo **ideograma**; en ellas se representa el concepto que se quiere estudiar o analizar junto con ciertos elementos gráficos (rectas tangentes, subtangentes, triángulos infinitesimales), que ilustran mediante comparación los criterios para establecer si se tiene un punto máximo y uno mínimo. De esta forma se puede deducir a partir de dichas gráficas, si las subtangentes crecen o decrecen cuando se va acercando la abscisa al punto extremo o qué ocurre con los triángulos construidos sobre los puntos de las curvas.





Figuras 3 y 4
Máximo y mínimo con tangente horizontal





Figuras 5 y 6
Mínimo y máximo con tangente vertical

Los problemas que se incluyen a modo de ejemplo para practicar y demostrar la potencia de este método hacen referencia a situaciones geométricas o fenómenos físicos-mecánicos. Los primeros recurren a curvas clásicas expresadas, bien de forma algebraica como el Folium de Descartes o la parábola semicúbica de Neile, o bien de forma descriptivo-geométrica a partir de la traza de un punto que cumple unas determinadas condiciones como la **roulette** Pascal (que se obtiene cuando un punto se mueven sobre una base fija) o haciendo referencia a diferentes figuras geométricas (segmentos, rectángulos, cono, paralelepípedos) para las que se establecen ciertas condiciones. En cuanto a los problemas de índole físico-mecánico se incluyen varios problemas de recorridos mínimos uno relacionado con la refracción de la luz y el otro referido a un viajero. Además hay un problema en el que se plantea la posición que debe tener una polea y el último hace referencia a una cuestión relativa a la geodesia. Por cuestiones de extensión sólo se va a incluir un problema de cada uno de los dos tipos escogidos buscando cierta similitud con los que se plantean hoy en día en la educación secundaria.

El siguiente ejemplo se puede considerar un antecedente de los actuales problemas aritméticos, en los que a partir de un número que se divide en dos cantidades, se crea otra cantidad. En este caso, como la situación planteada está en un contexto geométrico lo que se divide no es una cantidad sino una línea (en realidad, un segmento).

> EXEMPLE IV
>
> Couper la ligne donnée AB en un point E, en sorte que le produit du quarré de l'une des parties AE par l'autre EB, soit le plus grand de tous les autres produits formés de la même maniere (p. 44).

En este problema hay que dividir la longitud de una línea a en dos partes x y a-x, de forma que $x^2(a\text{-}x)$ sea un máximo. Para resolverlo, se calcula $\mathrm{dy} = \frac{2axdx-3xxdx}{aa}$, se iguala a 0, se busca la solución de la ecuación resultante y se obtiene el punto $AE(x) = \frac{2}{3}a$. Dos cuestiones merecen ser mencionadas en torno a este procedimiento. Por un lado el cálculo de la diferencia de L'Hôpital se hace consiguiendo una expresión homogénea, hemos de recordar que se está trabajando con magnitudes geométricas de forma que los literales hacen referencia a esas magnitudes y, por la herencia griega, se sigue manteniendo la norma de configuración de este tipo de expresiones. Por otro lado no se tiene en cuenta la solución x=0 que da lugar a un mínimo sin indicar en el texto el porqué.

A continuación se generaliza para el caso $x^m(a\text{-}x)^n$, obteniéndose como abscisa del máximo $x=\frac{m}{m+n}$ y se concluye mediante la interpretación tanto de la situación planteada como del resultado obtenido en diferentes casos particulares para m y n, siendo en algunos de ellos uno de los exponentes negativos, en cuyo caso la línea de partida hay que prolongarla a partir de los extremos de partida para poder obtener el punto en cuestión. Se puede observar que las funciones que se utilizan hacen referencia a una familia de curvas, en lugar de a una en concreto de forma que los resultados que se obtienen son los más generales posibles.

El siguiente es un problema de recorridos mínimos en dos medios en los que las velocidades son distintas y hay que encontrar el punto que hace mínimo el recorrido.

> EXEMPLE IX. La ligne AEB étant donnée de position sur un plan avec deux points fixes C, F; & ayant mené à un de ses points quelconques P deux droites CP (u), PF (z); soit donnée une quantité composée de ces indeterminées u & z, & de telles autres droties dones a, b &c. qu'on voudra. On demande quelle doit éter la position des droites CE, EF, afin que la quantité donnée, qui en est composée, soit plus grande ou moindre que cette même quantité lorqu'elle est composée des droites CP, PF. (p. 47)

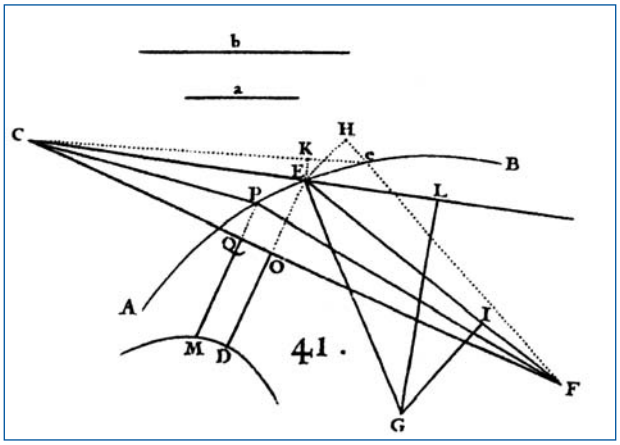


Figura 7
El problema de la refracción de la luz

Este ejemplo se plantea de forma muy general; no se hace referencia ni a una función ni a una solución concreta, se parte de una curva AB sobre la que inciden líneas a partir de un punto C y de la que parten otras líneas que llegan a otro punto F del otro lado de la línea. Las magnitudes de dichas líneas están multiplicadas por sendas cantidades a y b fijadas de antemano (que pueden referirse a velocidades). La curva divide al plano en dos semiplanos, en cada uno de los cuáles la recta cumple unas determinadas condiciones, como si fueran dos medios distintos, en realidad se refiere a un problema relativo a la refracción de la luz. Se trata de buscar un punto E de la curva para el que la expresión obtenida sea la mínima posible. La curva MD se dibuja trazando perpendiculares desde las soluciones posibles.

Para resolver el problema se utiliza por un lado la noción de diferencia y por otro la semejanza de triángulos y se explica mediante un ejemplo, tratando de minimizar la expresión $au+zz$. Por medio del criterio establecido, se calcula la diferencia de la expresión anterior obteniéndose que $adu+2zdz=0$ y como consecuencia $du.-dz::2z.a$. La expresión anterior se interpreta indicando que, como dz debe ser de signo contrario en relación con du, la posición de las rectas CE, EF debe ser tal que mientras u crece, z disminuye.

Para el cálculo del punto E utilizando la noción de semejanza de triángulos se escoge primeramente un punto cercano a E, *e*, y se forman los triángulos rectángulos ELG y EKe, EIG y EHe, semejantes entre ellos. Se restan a los ángulos rectos GEe y LEK el mismo ángulo LEe, para que las diferencias, LEG y KEe, sean iguales, y por tanto los ángulos IEG, HEe serán iguales. A partir de ahí y de la expresión generada anteriormente, se establece la siguiente relación: *GL.GI::Ke(du). He(-dz)::2z.a*. La conclusión a la que se llega es que la posición de las rectas CE, EF debe ser tal que calculada la perpendicular EG sobre la línea AEB, el seno GL del ángulo GEC será al seno GI del ángulo GEF, como las cantidades que multiplican a *dz* son a las que multiplican a *du*, con lo que se establece la ley de Snell correspondiente a la refracción de la luz.

El razonamiento y la notación utilizados, totalmente geométrico, recuerda los métodos euclídeos de demostración. A continuación se aplica la solución de este problema a otros dos: uno relativo al recorrido de un viajero y otro planteado de forma estrictamente geométrica.

INTERPRETACIÓN HEURÍSTICA

La publicación de este libro está marcada por el momento histórico en el que surgió, por lo que su estructura es la clásica de los libros de matemáticas, heredando la forma de hacer de los matemáticos griegos. A partir de unas definiciones iniciales en las que se establece el significado de los conceptos "primarios" que van a aparecer a lo largo del texto, se van a suceder las diferentes proposiciones que caracterizan las propiedades, estructura, reglas de cálculo en los que están involucrados dichos conceptos. Con cada una de dichas proposiciones se incluye un problema o ejercicio resuelto con la pretensión ejemplificarla. L`Hôpital trató de escribir un buen libro de texto que explicase el Cálculo Diferencial que hasta entonces había sido ajeno a prácticamente toda la comunidad de matemáticos y de estudiantes. Todo ello configura una visión *didáctica* de acercamiento a estos conceptos que se va a mantener intacta durante mucho tiempo.

Desde el punto de vista de la *epistemológico*, hay que considera que para entender la concepción de L'Hôpital acerca del Análisis Matemático, en general, y del Cálculo Diferencial, en particular, es esencial comprender los dos primeros postulados establecidos en su libro: en el primero: "Se pueden tomar como iguales dos cantidades que difieren sólo en una cantidad infinitamente pequeña, p.2", se establece la regla para cálculo con magnitudes pues permite ampliar la noción que se tenía hasta el momento de igualdad; y el segundo: "una curva puede ser considerada como formada por segmentos rectos infinitamente pequeños que determinan, por medio de los ángulos que forman unos con otros, la curvatura de la curva, p.3", plantea el significado geométrico de la noción de curva, tratándose de una concepción inicialmente estática en la que se considera como formada por trozos rectos de longitud infinitesimal. Esta concepción inicial se trasforma en un tratamiento dinámico cuando se ofrece tanto la definición de diferencia como la de los conceptos de máximo y mínimo puesto que los relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las ordenadas. Por otro lado, dado que no se maneja el

concepto de función, se realiza un estudio de curvas descritas por los geómetras griegos, como: el Folium de Descartes, la Parábola semicúbica de Neile, o la Concoide,... y las demostraciones que se incluyen se basan en razonamientos de tipo geométrico por lo que se puede considerar que la visión del Análisis es de tipo geométrico. En realidad, el objeto de estudio no son las curvas sino las familias de esas curvas cuyo comportamiento se presume similar.

Las aplicaciones nos ofrecen los aspectos *socio-culturales* en los que se enmarca este libro. Entre ellas resalta l`Hôpital el estudio de la curvatura de las curvas, el cálculo de tangentes y perpendiculares, el análisis de los puntos máximos y mínimos y el estudio de los rayos que se reflejan o se refractan. Se establecen, por lo tanto, una colección de métodos analíticos necesarios para resolver problemas sobre curvas, considerando las cantidades desde un punto de vista geométrico. Las situaciones planteadas, utilizan un contexto geométrico en el que las cantidades son consideradas más como magnitudes de objetos geométricos, que como números, aún en el caso de los problemas de tipo aritmético. Además de los problemas de índole geométrico, se abordan otros como los relacionados con la reflexión y la refracción de la luz, el recorrido mínimo, el movimiento de una polea o el estudio del crepúsculos, que eran, en aquella época, el tipo de problemas en los que estaban involucrados todos los matemáticos.

La revisión realizada nos ofrece una visión del Análisis muy distinta de la que se presenta en la educación actual. Recuperar algunos de los aspectos tratados podría dotar de sentido a estos conceptos que para los alumnos resultan tan abstractos y ajenos a los fenómenos que les dieron origen y, para los que, generalmente, se limitan a memorizar ciertas reglas "algebraicas" que simplifican los procedimientos de cálculo pero que obscurecen su significado. El carácter geométrico-dinámico que dio origen a esta rama de las matemáticas podría recuperarse utilizando, en la enseñanza, software de geometría dinámica que, además, permitiría el estudio de funciones y curvas complejas relacionadas con las aplicaciones que dan sentido a estos conceptos. Tanto el estudio de fenómenos de carácter geométrico como físico-mecánico podrían tanto motivar a los alumnos como organizar los conceptos en esquemas significativos que les permita comprender los conceptos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arcavi, A. e Isoda, M. (2007). Learning to listen: From historical sources to classroom practice. *Educational Studies in Mathematics, 66, 111-129.*

Bagni, G. T. (2001). La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 45-62.

Cantoral, R. (1995) Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11(1), 55-101.

Czarnocha, B., Dubinsky, E. Loch, S., Prabhu, V, y Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area: In Students and in history. *College Mathematics Journal, 32*(2)*,* 99-109.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des èleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph.D. Université Laval.

González, M.T. (2002). *Sistemas Simbólicos de Representación en la Enseñanza del Análisis Matemático: Perspectiva Histórica acerca de los Puntos Críticos*. Tesis Doctoral. Universidad de Salamanca.

Grattan-Guinnes, I. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos.* Madrid: Alianza Editorial.

Heeffer, A. (2006). The methodological relevance of the history of mathematics for mathematics education. *International Conference on 21st Century Information Technology in Mathematics Education* .Chang Mai, Thailand.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational Studies in Mathematics, 48*, 137-174.

NCTM (1969) *Historical Topics for Mathematics classroom.* Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles èpistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathematiques,* 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics.* 18, 371-397.

Sierra, M., González, M.T. y López, C. (1999) Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria: 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias,* 17 (3), pp. 463-476.

Sierra, M.; González, M.T. y López, C. (2000) Concepciones de los alumnos de bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad. *RELIME*, 2 (1), 71-85

Sánchez, C. y Valdés, C. (2001) *Los Bernoulli.* Madrid: Síntesis

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
THALES
Secretaría General

CONVOCATORIA DE ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA DE LA SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

La Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES convoca ASAMBLEA GENERAL ORDINARIA que tendrá lugar a las 19,00 horas del día 24 de noviembre de 2011, en Jerez de la Frontera, en el Hotel Guadalete, Avda. Duque de Abrantes 84, con el siguiente

ORDEN DEL DÍA

1. Lectura y aprobación si procede del acta de la asamblea anterior celebrada en Córdoba, el 11 de septiembre de 2010.
2. Información general por parte del presidente de la sociedad.
3. Aprobación si procede de la memoria de actividades del año 2010.
4. Aprobación si procede del balance económico del año 2010.
5. Aprobación si procede del presupuesto de ingresos y gastos correspondiente al año 2011.
6. Ruegos y preguntas.

SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES

Octubre, 2011

El Secretario General de la SAEM THALES

Agustín Carrillo de Albornoz Torres

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 99-112*

La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática

Miguel Picado y Luis Rico
Universidad de Granada

Resumen: *El artículo presenta algunas ideas sobre la investigación histórica y se resaltan las fases de su método aplicado en educación. También, se presenta un ejemplo de selección de las fuentes en la investigación histórica en educación matemática centrada en el análisis de textos antiguos. Esta se desprende de un estudio realizado que sustenta la fase de selección de textos de una investigación en curso.*

Términos claves: *Criterios de selección, investigación histórica, Educación Matemática, método histórico, selección de textos.*

Abstract: *This paper presents some ideas on historical research highlighting the phases of the historical method in mathematics education. Also, we present an example for the selection of sources in historical research in mathematics education focused on the analysis of ancient texts. This is clear from a study that supports text selection phase of an ongoing investigation.*

Keywords*: Historical research, historical method, mathematics education, selection criteria, textbooks.*

INTRODUCCIÓN

Los logros de los estudios históricos y su contribución a la comprensión de los fenómenos que abordan otras áreas del saber han sido expuestos por autores e investigadores en diversos campos disciplinares, singularmente en el campo de la Educación. Algunos de ellos se han dedicado a reflexionar sobre la contribución que se hace desde la investigación histórica a otros campos. Sus escritos resaltan distintos vínculos que relacionan este tipo de investigación con otras disciplinas. Esta gama literaria nos permite distinguir tres tendencias en cuanto a la elaboración de documentos sobre investigación histórica.

Primero, es posible distinguir trabajos que presentan aspectos teóricos de la historia como disciplina destacando el objeto de su estudio, su finalidad y las diversas ideas sobre la objetividad del conocimiento histórico (Suárez, 1977; Losee, 1989). Algunos autores procuran un acercamiento entre historia y ciencia mediante la presentación de ideas sobre la ciencia, su historia y la utilización de la investigación historiográfica en esta área.

Como segundo caso, se identifican trabajos basados en el método histórico o el método historiográfico para el que reconocen una serie de pasos, organizados sistemáticamente, que caracterizan una investigación histórica (Suárez, 1977; Cardoso, 2000; Salkind, 1999; Aróstegui, 2001; Cohen y Manion, 2002). Entre ellos, lo relativo a la elección del tema –el punto de partida–, las fuentes, el sentido crítico y la interpretación de los datos. Dentro de lo que podríamos considerar como una síntesis entre teoría y método práctico, Aróstegui (2001) muestra, desde una perspectiva teórica, la historiografía y las características de su método, al que denomina método historiográfico. Su punto de vista lo concibe como un legítimo descendiente de la ciencia social y su metodología. A partir de sus ideas, la investigación histórica se ajusta a una serie de pasos o fases, a una planificación, "la previsión de adaptación del trabajo a los problemas concretos del objeto investigado" (p. 362) que incluye aspectos sobre qué conocer, el cómo conocerlo y cómo comprobar lo conocido, cuestiones que desencadenan una serie de actividades para su alcance. Para el historiador de una disciplina llevar a cabo este tipo de estudios y la necesidad de conocer sobre el método histórico forman parte de las técnicas que debe dominar y de las habilidades que debe poseer como investigador. El entendimiento de la naturaleza histórica de un fenómeno es vital para comprender el fenómeno en sí mismo y con ello evaluar de manera completa los avances en la ciencia desde la comprensión del contexto dentro del cual sucedieron (Aróstegui, 2001; Salkind, 1999).

Como tercer caso se reconocen aquellos trabajos que, además de presentar una metodología para la investigación histórica, exponen sobre la concepción de la investigación histórica; es decir, abordan diversas ideas sobre el significado de la investigación histórica como una actividad en el campo de las ciencias. Suárez (1977), Losee (1981) y Fox (1987) son algunos de los autores que se refieren a este significado.

INVESTIGACIÓN HISTÓRICA

Una integración de las ideas de Cardoso (2000), Cohen y Manion (2002), Fox (1987), Grajales (2002), Losee (1981) y Suárez (1997) sobre la investigación histórica, nos permiten sostener que tratar con la investigación histórica exige, y a la vez permite, reflexionar sobre la historia misma, sobre las características del método histórico y las cualidades de un historiador, conduce a una reflexión sobre el conocimiento, la epistemología y la teoría. Investigar en Educación desde la perspectiva histórica no es narrar una serie de datos cronológicamente expuestos. Es indagar hechos, describir fenómenos y analizar datos; es ilustrar contextos y situaciones educativas; es integrar, interpretar y evaluar. La investigación permite compartir el conocimiento de la realidad histórica, en la búsqueda de explicaciones y respuestas para las diversas circunstancias y problemas de la convivencia entre los hombres, singularmente de los fenómenos educativos. La didáctica expresa los modos socialmente establecidos de abordar la educación, la realidad educativa de un periodo y una época determinados. Por ello resulta especialmente adecuada la investigación histórica para comprender la realidad educativa del momento actual, mediante la indagación de sus antecedentes históricos.

EL MÉTODO HISTÓRICO EN EDUCACIÓN

La historia es un medio para mostrar lo que en el pasado ha sido realmente sobresaliente y para que el investigador seleccione y observe aquello que más se adecúe a su trabajo de indagación según la temática y las situaciones de su interés. En las últimas décadas, diversas investigaciones han reconocido vínculos y utilidades de la historia con la educación matemática poniendo de manifiesto la potencialidad de la historia para el estudio de los procesos didácticos y para interpretar los cambios ocurridos en épocas pasadas en el currículo de matemáticas (Farmaki, Klaudatos y Paschos, 2004; Furinghetti, 1997; Furinghetti, 2002; Furinghetti y Somaglia, 1998; Katz, 1997; Tzanakis y Arcavi, 2000). Al igual que estos autores, reconocemos la utilidad de la historia en los procesos de enseñanza y aprendizaje de conocimientos matemáticos; sin embargo nuestro foco de atención es el método histórico como metodología investigativa aplicable en estudios sobre Historia de la Educación Matemática.

Las ideas expuestas sobre la investigación histórica permiten una breve introducción al método histórico en educación, sus pasos o fases. Llevar a cabo una investigación histórica puede resultar muy similar a la manera de realizar otros tipos de investigación.

El método o proceso bajo el cual se lleva a cabo una investigación histórica en educación ha sido definido y caracterizado por Ruiz (1997), Salkind (1999) así como por González y Sierra (2003) cuyos planteamientos se sintetizan en la Tabla 1.

Ruíz (1997)	Planteamiento Hipótesis y modelos Fuentes histórico-educativas Análisis Verificación de hipótesis Síntesis explicativa
Salkind (1999)	Definición del tema Hipótesis Fuentes de información Autenticidad y exactitud de datos Síntesis de datos Interpretación de resultados
González y Sierra (2003)	Planteamiento Heurística Análisis Hermenéutica Exposición

Tabla 1
Fases del método histórico

Aróstegui (2001) y Cardoso (2000) realizan un planteamiento similar a los anteriores resaltando la elaboración de una fundamentación teórica en este tipo de investigación, misma que también es reconocida en Ruiz (1997) como un estudio del estado de la cuestión en la primera fase de la investigación.

Estas similitudes en la forma de plantear el proceso para la realización de una investigación en historia, aplicable a la historia de la educación matemática, nos permite una síntesis en cuanto a las fases. Estas son: (a) planteamiento de la investigación; (b) selección de las fuentes; (c) análisis de las fuentes seleccionadas; (d) interpretación de los datos, y (e) comunicación de los resultados.

El planteamiento de la investigación

Una primera fase de planteamiento de la investigación incluye la selección del tema, su delimitación, el establecimiento de un marco teórico, la definición del problema de investigación y la formulación de hipótesis o conjeturas a partir de una revisión documental previa (Rico, 1999).

Para la selección del tema deben considerarse aspectos como la relevancia, viabilidad, originalidad y el interés personal. La delimitación requiere de criterios como el espacio, el tiempo y el marco institucional sobre el cual se realizará la investigación (Vilar, 1976). La selección y delimitación del tema se sigue con el establecimiento de cuestiones que darán origen al problema a tratar y responder.

En cuanto al marco teórico, Cardoso (2000) apunta:

> Una vez definido el tema, el paso siguiente en el proceso de investigación consiste en la construcción del modelo teórico, es decir, en la definición del marco teórico en función del cual se plantearán las hipótesis heurísticas o de trabajo a ser comprobadas en etapa posterior. (p. 167)

Este marco teórico se sustenta en teorías previamente establecidas y en la bibliografía que constituye el estado de la cuestión a investigar.

En la investigación histórica, las hipótesis –conjeturas para algunos investigadores en esta área– no siempre son presentadas de forma explícita, ya que en algunos casos suelen estar implícitas (Ruíz, 1997). Este autor distingue tres tipos de hipótesis: *factográficas*, elaboradas en los procesos de lectura de las fuentes, de crítica externa e interna y en el establecimiento de los hechos; *explicativas*, que explican hechos y formulan leyes; e hipótesis *de construcción* que integran los datos sobre el pasado por medio de la periodización y la clasificación de los datos.

La selección de las fuentes

La selección de las fuentes de información se presenta como segunda fase. Esta incluye la localización, selección y clasificación de las mismas siguiendo criterios

establecidos para tal fin y que más se acerquen a la finalidad y los objetivos de la investigación.

Cardoso (2000) y González y Sierra (2003) se refieren a esta fase como heurística. En ella se lleva a cabo la búsqueda, localización y selección de las fuentes documentales correspondientes a todo documento, o cualquier tipo de registro, que proporcione información del pasado, en nuestro caso educativo, que haya sido preservado y transmitido.

Sobre las fuentes de información de datos históricos cabe destacar que estas se clasifican en primarias y secundarias (Cohen y Manion, 2002; Grajales, 2002; Salkind, 1999). Las primarias son aquellos sujetos o artículos originales con una relación directa, en tiempo y espacio, con el hecho en estudio. Como afirma Salkind (1999, p. 207), "son los resultados directos de un suceso o una experiencia y que se registran sin que el historiador necesariamente tenga la intención de utilizar posteriormente la referencia". Las fuentes denominadas secundarias corresponden a relatos de hechos efectuados por sujetos que no han participado directamente en el evento; describen un acontecimiento del cual no se tiene un testimonio personal del hecho. En Picado (2009) se presenta una síntesis de la clasificación y ejemplificación de las fuentes de datos realizada por los autores mencionados.

Localizadas las fuentes, es necesario clasificarlas y seleccionarlas con el objeto de evitar los vacíos documentales y las redundancias.

Otro aspecto característico de esta etapa lo constituye la realización del proceso de crítica histórica. Este proceso permite evaluar la autenticidad y exactitud de las fuentes localizadas. La crítica histórica contempla una crítica externa y una crítica interna (Best, 1982; Ruíz, 1997; Salkind, 1999; Cohen y Manion, 2002). La crítica externa tiene como propósito la comprobación de la autenticidad del documento y la legitimidad de los datos. "Se dirige a descubrir fraudes, falsificaciones, engaños, invenciones o distorsiones" (Cohen y Manion, 2002, p. 87). La crítica interna se encarga de valorar la exactitud o el mérito del contenido del texto; esto implica una comprobación del crédito del autor y de la exactitud y veracidad de los datos tratados. Este proceso proporciona una aceptación de los datos como evidencia histórica para el trabajo de investigación.

El Análisis de las Fuentes Seleccionadas

Una tercera fase contempla el análisis de los documentos elegidos como fuentes de información en la fase anterior. A partir de este se esperan nuevas afirmaciones sobre los hechos a los que hacen referencia las fuentes y que responden al problema y los cuestionamientos de la investigación. González y Sierra (2003) sostienen que el análisis de la documentación permite estudiar el material seleccionado considerando los criterios pedagógicos al igual que los históricos que se definan para tal fin. Si bien se ha considerado el proceso de crítica histórica de las fuentes en la fase anterior, Cardoso (2000) y Ruíz (1997) proponen que es en esta etapa en la que se realizan los procedimientos hermenéuticos de interpretación o descodificación de las fuentes y de crítica histórico-pedagógica –crítica externa e

interna–. Como ejemplo de estudio sobre el análisis de fuentes históricas, cabe mencionar los estudios de Gómez (2011) sobre el análisis de manuales escolares y libros de texto, el de Sierra, González y López (1999) acerca de la evolución histórica del concepto de límite funcional y el de Maz y Rico (2009) sobre los números negativos en los siglos XVIII y XIX.

La Interpretación de los Datos

Esta fase se destina a la interpretación de los datos obtenidos como resultados del análisis y que constituirían las respuestas a los cuestionamientos planteados al inicio de la investigación. La finalidad es integrar resultados y determinar tendencias a partir de las cuales surjan otras cuestiones de interés (Salkind, 1999). González y Sierra (2003) apuntan que esta fase, a la que se refieren como hermenéutica, describe la interpretación histórico-pedagógica. De esta forma, es aquí donde el investigador histórico debe tratar de dar una respuesta adecuada a las preguntas planteadas e indicar las posibles causas por las que se produjeron los hechos históricos analizados.

La interpretación de los datos ha sido también entendida como la construcción de una síntesis o de una explicación histórica; ambas consideradas como resultado de todo un proceso de investigación iniciado a partir de una visión totalizadora de un problema determinado y que se sucede de una reducción analítica (Cardoso, 2000) pero que, a la vez, constituye un proceso en sí misma que implica contar lo que se sabe, precisando cómo se logró saber (Aróstegui, 2001). En esta construcción histórica, sea síntesis o explicación, se ubica la verificación de las hipótesis realizada a partir de la seguridad que proporcionan las fuentes evaluadas, criticadas y analizadas.

La Comunicación de los Resultados

La fase de exposición o comunicación de resultados presenta la información obtenida a partir del trabajo realizado; sin embargo, no proporciona un cierre absoluto del proceso de investigación. Tiene como finalidad comunicar los resultados y las conclusiones producidas en relación con los objetivos y las hipótesis o conjeturas iniciales. Algunos autores han establecido un vínculo estrecho entre esta fase y la anterior. Ruiz (1997) considera que la interpretación de los datos contempla tres tareas en tres momentos: el establecimiento de los datos, la explicación histórico-pedagógica y la elaboración del texto. Cardoso (2000) presenta como última fase del método histórico la síntesis y como uno de sus elementos la redacción.

Balance

Desde nuestra perspectiva, a partir de las similitudes en los planteamientos expuestos, la realización de una investigación histórica puede contemplar cinco fases:

1. Planteamiento de la investigación, que abarca el tipo de investigación y la presentación del problema, objetivos y conjeturas definidos para el estudio.
2. Búsqueda, localización y selección de las fuentes documentales y proceso de crítica histórica.
3. Análisis de las fuentes seleccionadas mediante categorías de análisis previamente definidas.
4. Integración e interpretación de los datos y verificación de las conjeturas.
5. Exposición de resultados.

EL PROCESO DE SELECCIÓN DE TEXTOS

Como hemos mencionado la selección de las fuentes es una de las fases de la investigación histórica. A continuación presentamos una propuesta para la selección de textos en un estudio histórico en educación matemática. Ésta la ejemplificamos con las fases del proceso de selección de documentos definidas para la investigación en curso. Para situar al lector describimos algunos aspectos generales de dicho estudio.

La investigación en curso

La investigación pretende un estudio histórico sobre el tratamiento dado al Sistema Métrico Decimal (SMD) en el Sistema Educativo español y la forma en que se aborda en textos de matemáticas en la segunda mitad del siglo XIX, específicamente entre 1849 y 1892. Esto mediante la búsqueda, selección y revisión de textos de matemáticas utilizados en la enseñanza primaria, secundaria y en la formación de maestros en la época.

El análisis de los textos seleccionados se centra en la técnica de análisis de contenido propuesta por Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) y tomará en consideración aspectos del análisis cognitivo y el análisis de instrucción (Lupiáñez, 2009), tres de las técnicas que conforman el análisis didáctico que permiten abordar desde la perspectiva curricular los textos como documentos curriculares.

De esta forma, recurriremos a una selección de textos de matemáticas, como documentos curriculares, empleados para la enseñanza del SMD en los establecimientos de educación primaria y secundaria y las Escuelas Normales –centros para la formación de maestros– editados en el período 1849-1892.

Esta orientación metodológica lleva a realizar, en primer término, un análisis de cada uno de los textos desde la perspectiva matemática, para reconocer, describir y caracterizar la estructura conceptual, los sistemas de representación y las situaciones en que se enmarca el SMD como estructura matemática. También implica, en segundo lugar, estudiar las expectativas, oportunidades y tareas de aprendizaje planteadas para abordar didácticamente la investigación.

En síntesis, nuestro problema se constituye sobre la base de dos cuestionamientos: con qué tratamiento se atendió al SMD en el Sistema Educativo español en el período comprendido entre 1849 y 1892 y qué características didácticas tuvieron los textos de matemáticas, como documentos para la adopción de un nuevo sistema de pesas y medidas.

Localización de las fuentes

La selección de las fuentes documentales para la realización del estudio constituye un proceso que abarca tanto la definición de criterios de selección y la localización, descripción y clasificación de los textos, como la comprobación de la autenticidad y legitimidad del texto y la valoración de la exactitud de su contenido –la crítica histórica–.

Para la localización de los textos pueden considerarse medios como los estudios previos y los centros de documentación. Los primeros se refieren a investigaciones en las que el proceso de selección de textos se haya realizado siguiendo los parámetros que más se aproximen a la investigación pretendida o en desarrollo. Para nuestro trabajo se han tomado en cuenta los textos considerados y seleccionados en los estudios de Aznar (1997), Carrillo (2005), del Olmo, Rico y Sierra (1996), Picado (2009) y Vea (1995). Estos estudios han contado y tratado con textos editados para la difusión del SMD en España en el siglo XIX. Específicamente, en el trabajo de Vea (1995) encontramos un listado considerable de textos de matemáticas para la enseñanza secundaria en España durante el siglo XIX. Los trabajos de del Olmo, et al. (1996) y Carrillo (2005) incluyen listados de textos de aritmética para la formación de maestros en los períodos 1830–1930 y 1838-1868, respectivamente. Aznar (1997) hace una importante revisión bibliográfica que incluye una lista considerable de textos sobre el SMD, su enseñanza y difusión social en España durante el siglo XIX. Picado (2009) establece una lista de textos, elegidos para la realización del estudio piloto sobre la misma temática.

Los centros de documentación como bibliotecas universitarias, históricas o públicas y otros sitios de información, se constituyen en las fuentes de textos para una búsqueda inicial o para el complemento de los listados previamente hechos en estudios anteriores. En nuestro caso, han ayudado a complementar los listados de textos considerados en las investigaciones previas. Esto mediante la consulta de catálogos electrónicos y la visita a diferentes centros de documentación.

Criterios para la selección de textos

En la mayoría de la ocasiones la localización de textos produce un número significativo de documentos que conducen a la definición de una serie de pautas para una disminución conveniente y razonada de la muestra sobre la cual se erigirá la fase de análisis. Así, la localización de textos hace necesaria una definición detallada de criterios que faciliten y encaucen una selección adecuada de textos representativos para la investigación.

Para el estudio en desarrollo, la selección de textos se ha llevado a cabo en dos fases. Una selección inicial de textos y otra fase posterior, en la que se eligen los textos que finalmente se analizan.

Aunque muchos de los textos –aquellos considerados en los estudios previos– habían pasado por un filtro inicial de criterios de selección se hizo indispensable reconsiderar algunos de estos principios y definir nuevos para depurar desde un inicio los que más se acercan a los objetivos del estudio (Maz, 2000). Así, para la primera fase de selección fueron establecidos los siguientes.

Fecha y Lugar de Publicación

Es recomendable que los textos se ubiquen dentro del período temporal y área geográfica en los que se delimita el estudio histórico.

Delimitado nuestro estudio en España en el período comprendido entre 1849 y 1892, los textos que se someten al análisis, deben satisfacer estas dos características: ser una publicación española –exclusivamente para la Península Ibérica, Baleares y Canarias–, editada entre el 19 de julio de 1849 y el 8 de julio de 1892. En cuanto a la fecha de su publicación, debemos agregar que se considera la edición más antigua dentro del período establecido. Sin embargo, de ser necesario y por efectos de disponibilidad, se puede recurrir a ediciones posteriores.

Título con la denominación Sistema Métrico Decimal

Tal como se considera en el estudio preliminar (Picado, 2009) los textos deben estar directamente relacionados con el SMD. Para este estudio hemos ampliado este criterio y han sido considerados textos cuyo título incluye términos como pesas y medidas o Aritmética en los que es notoria la inclusión del SMD.

La enseñanza como finalidad

Otro de los principios definidos ha sido la relación directa de los textos con la enseñanza del SMD. En nuestro estudio se descartan aquellos textos elaborados con otro tipo de finalidad y se priorizan aquellos editados y aprobados para la enseñanza primaria, secundaria y la formación de maestros de matemáticas. Se priorizan los textos cuyo título incluye la indicación de su uso en estos establecimientos educativos.

Disponibilidad del texto

La accesibilidad al texto es otra de las pautas consideradas para este estudio. Con él se asegura la disponibilidad y el acceso al texto cuando sea necesario, prin-

cipalmente en la fase de análisis, y la posibilidad de adquirir una reproducción impresa o digital del mismo cuando así sea factible.

Originalidad

Sin duda, todos los textos que resulten finalmente seleccionados deben corresponder a auténticas fuentes primarias de datos históricos; es decir, ediciones originales de la época.

La segunda fase de selección estuvo orientada por la comprobación de tres criterios más para la selección final de textos. Estos se han definido como:

Representatividad del texto en los períodos históricos definidos

En Picado (2009) se identifican tres etapas históricas en el período comprendido entre 1849 y 1892. Estas etapas, además de representar momentos claves en la implantación del SMD, de los que destacamos los vinculados a su enseñanza, nos permiten una distribución de los textos seleccionados a lo largo del período histórico en el que trabajamos. Con este criterio se realiza una clasificación de los textos inicialmente seleccionados por etapa histórica.

Autor: profesión y relevancia

Tiene que ver con la profesión del autor del texto y la trascendencia del trabajo realizado por éste en el proceso de implantación en España del SMD, o bien su trascendencia como autor de distintas obras en la época.

En gran cantidad de textos de aritmética editados a partir de 1852, tanto para la enseñanza de la matemática como para otras áreas, el profesor –o el maestro– de matemáticas toma un protagonismo en la elaboración de textos para la difusión del SMD. Esto ha sido subrayado por Aznar (1997) quien señala:

> En consecuencia con este protagonismo en las aulas, serán los docentes, principalmente los que ejercieron en la enseñanza primaria, los que van a dejar escritos en esta segunda mitad del siglo la mayor parte de los textos, cuyo número es, también, netamente superior al de los que fueron firmados por otros colectivos profesionales (p. 301).

Por su parte, Picado (2009) resalta que:

> Los autores estaban vinculados a la educación al ocupar puestos relacionados con la enseñanza de las matemáticas: profesores de educación normal, superior y elemental; maestros de instrucción primaria o primaria superior; profesores universitarios o incluso miembros de comisiones de maestros (p. 170).

Por ello, se seleccionan textos cuyos autores estuvieron vinculados directamente a la educación, en especial a la Educación Matemática y cuyos aportes hayan tenido un alto reconocimiento.

En cuanto a su trascendencia en la época, ésta se define a partir de la información que pudo obtenerse de recursos como enciclopedias y diccionarios, y de los datos obtenidos en distintas páginas web.

Estilo del documento

En Picado (2009) también se identifican y describen estilos de textos comunes para la difusión del SMD en España. Estos fueron el compendio, la cartilla, el manual, la explicación, las tablas y el tratado. Para la selección de los textos se prioriza en estos estilos y se exceptúa cuando se careciera de textos en algunos de los niveles con esta característica. Otros de los estilos que pueden considerarse son nociones, elementos, libro, memoria, contrato, epítome, lecciones, prontuario, principios, cuaderno y método.

Una vez aplicados los principios de selección en ambas fases y reducida la cantidad global de textos se procede a seleccionar los textos que finalmente serán sometidos a análisis. Esta selección final puede realizarse mediante la elaboración de una planilla en la que se identifiquen criterios claves para el estudio como las épocas, la finalidad de los textos y el estilo.

Esta estrategia permitió en el estudio piloto la selección de doce textos acompañada de criterios adicionales para lograr ese número de ejemplares. Estos criterios suplementarios incluían la selección de al menos un texto en cada período y estilo considerado y pertenecientes a la finalidad o finalidades más comunes en cada período.

Reflexión final

La investigación histórica en educación, incluida la educación matemática, es una práctica con un método establecido y reconocido a lo largo de varios años. Una de sus fases, la selección de las fuentes de información, constituye un proceso cuidadoso que exige del investigador una inversión significativa de tiempo y una buena dosis de precisión al momento de una selección final de documentos.

Cuando la investigación histórica se centra en el estudio de textos antiguos, la selección de éstos y la definición de criterios deben responder a los objetivos y los lineamientos establecidos para el estudio. Es decir, conforman un proceso propio de cada investigación pero que bien puede tomar como base aquellos procesos de selección aplicados en estudios similares, con las adecuaciones temáticas del caso. Los criterios de selección deben responder con claridad a los intereses del investigador. Deben guiar al investigador a una selección razonada de textos sin importar la cantidad de criterios necesarios para llevarla a cabo. Para una selección ordenada y organizada de textos puede dividirse el proceso en fases que per-

mitan la reducción justificada del número de ejemplares y que, al mismo tiempo, controlen ese número necesario de criterios definibles hasta la selección final. No hay que establecer un criterio para forzar la reducción en el número de las fuentes, sino que hay que definir criterios para lograr la mejor representatividad de textos y justificar su selección.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con la financiación de la Junta de Becas de la Universidad Nacional (UNA) y el Fondo de Incentivos del Consejo Nacional para Investigaciones Científicas y Tecnológicas (CONICIT) del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la República de Costa Rica y se ha realizado dentro del Grupo de Investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico, (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación, con sede en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aróstegui, J. (2001). *La investigación histórica: teoría y método*. Barcelona: Crítica.

Aznar, V, (1997). *La unificación de los pesos y medidas en España durante el siglo XIX. Los proyectos para la reforma y la introducción del Sistema Métrico Decimal*. Tesis doctoral, Universidad de Valencia, Valencia.

Best, J. W. (1982). *¿Cómo investigar en educación?* Madrid: Morata.

Cardoso, C. (2000). *Introducción al trabajo de la investigación histórica: conocimiento, método e historia*. Barcelona: Crítica.

Carrillo, M, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Tesis doctoral, Universidad de Murcia, Murcia.

Cohen, L. y Manion, L. (2002). *Métodos de Investigación Educativa* (2ª ed.). Madrid: La Muralla.

Del Olmo, M; Rico, L. y Sierra, M. (1996). Textos de aritmética para la formación inicial del maestro (1830-1930). En P. Ballarín, et al. (Eds.), *IX Coloquio de historia de la educación. El currículum: historia de una mediación social y cultural* (pp. 351-356). Granada: Osuna.

Farmaki, V., Klaudatos, N. y Paschos, T. (2004). Integrating the history of mathematics in educational praxis. An euclidean geometry approach to the solution of motion problems, *PME 28. Vol. 3* (pp. 505-512). Noruega: PME.

Fox, D. (1987). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: Universidad de Navarra.

Furinghetti, F. (1997). History of mathematics, mathematics education, school practice: case studies in linking different domains. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 55-61.

Furinghetti, F. (2002). On the role of the history of mathematics in mathematics education. En I. Vakalis, D. Hughes Hallett, C. Kourouniotis, D. Quinney y C. Tzanakis (Eds.), *Proceedings of ICTM2* (Hersonissos, Crete, Greece), CD-Rom, J. Wiley e hijos. p.51.

Furinghetti, F. y Somaglia, A. (1998). History of mathematics in school across disciplines. *Mathematics in School, 24*(4), 48-51.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en didáctica de las matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *EMA, 7*(3), 251-292.

González, M. T. y Sierra, M. (2003). El método de investigación histórico en la didáctica del análisis matemático. En Castro, E. (Coord.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 109-130). Granada: Universidad de Granada.

Grajales, T. (2002). La metodología de la investigación histórica: una crisis compartida. *Enfoques, 14*, 5-21.

Katz, V. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 62-63.

Losee, J. (1989). *Filosofía de la ciencia e investigación histórica*. Madrid: Alianza.

Lupiáñez, J.L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Maz, A. (2000). *Tratamiento de los números negativos en textos de matemáticas publicados en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis de máster, Universidad de Granada, Granada.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

Picado, M. (2009). *Tratamiento del Sistema Métrico Decimal en textos de matemáticas en España en el período 1849-1892*. Tesis de máster, Universidad de Granada, Granada.

Rico, L. (1999). Desarrollo en España de los estudios de doctorado en Didáctica de la Matemática. En K. Hart y F. Hitt (Eds.), *Dirección de tesis de doctorado en Educación Matemática. Una perspectiva internacional* (pp. 1-28). México, D.F.: Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma, 58*, 7-23.

Ruíz, J. (1997). El método histórico en la investigación histórico-educativa. En N, de Gabriel y A. Viñao (Eds.), *La investigación histórico-educativa: tendencias actuales* (pp. 131-202). Barcelona: Ronsel.

Salkind, N. J. (1999). *Métodos de investigación*. México, DF: Prentice Hall.

Sierra, M., González, M. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C: O. U): 1940-1995. *Enseñanza de las Ciencias, 17(3)*, 463-476.

Suárez, F. (1977). *La historia y el método de investigación his*tórica. Madrid: Rialp

Tzanakis, C. y Arcavi, A. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. En Fauvel y van Maanen (Eds.), *History in Mathematics Education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Klumer Academic Publisher.

Vea, F. (1995). *Las matemáticas en la Enseñanza Secundaria en España en el siglo XIX*. Zaragoza, Universidad de Zaragoza.

Vilar, P. (1980). *Iniciación al vocabulario del análisis histórico*. Barcelona: Crítica.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 113-126*

Una experiencia de aula utilizando la historia de las matemáticas

Jesús Salinas-Herrera
Colegio de Ciencias y Humanidades. Universidad Nacional Autónoma de México
Natividad Adamuz-Povedano
Universidad de Córdoba
Noelia Jiménez-Fanjul
Universidad de Córdoba

Resumen: *Se presentan los resultados de una experiencia de aula, en la cual, desde una perspectiva histórica, se pretende acercar a los alumnos a una comprensión no sólo técnica sino también cultural de las matemáticas. En particular, se enfoca la atención en la dimensión ideológica de los valores asociados con las matemáticas bajo la etiqueta de "racionalismo". Se trabajan contenidos de la aritmética pitagórica para que el alumno descubra patrones aritméticos y geométricos y, se introduzca en los procesos de prueba en matemáticas. Asimismo, se destaca la percepción que tienen los alumnos acerca del enfoque histórico en el estudio de contenidos matemáticos.*

Palabras clave: *historia de las matemáticas, cultura, valores, aritmética pitagórica, Educación Matemática*

Abstract: *In this paper we present a classroom experience in which, from an historical perspective, students were approached to both technical and also cultural mathematical understanding. Especially, we focus on the ideological dimension of the mathematical values under the "rationalism" approach. Students work Pythagorean arithmetic in order to find out arithmetic and geometric patterns and to get into the procedures of mathematical proof. Furthermore, we show the students' perception about the historical approach applied to the study of mathematical contents.*

Key words: *history, culture, values, Pythagorean arithmetic, Mathematics Education.*

INTRODUCCIÓN

La experiencia de aula que aquí se presenta se llevó a cabo en el bachillerato de la Escuela Nacional Colegio de Ciencias y Humanidades, de la Universidad Nacional Autónoma de México (UNAM).

Esta Institución es uno de los dos bachilleratos que forman parte de la UNAM. Fue fundado hace 40 años, como parte de un proyecto de renovación de la Universidad. El Colegio de Ciencias y Humanidades, como indica su nombre, proponía ligar las ciencias y las humanidades y promovía un enfoque interdisciplinario de la educación. Esta institución tenía originalmente una población de alrededor de 75 000 estudiantes. A partir de la reforma de su Plan de Estudios, en los últimos 10 años, redujo su atención a una población de aproximadamente 60.000 estudiantes, los cuales están distribuidos en 5 centros.

En esta experiencia de aula se toma un enfoque histórico para mostrar un rostro humano de las matemáticas, y se destaca su papel en la cultura (Fauvel, 1991; Bishop, 1999). Se pretende mostrar a los estudiantes que las matemáticas no sólo están constituidas por contenidos conceptuales y procedimentales que pueden ser utilizados en la solución de problemas, sino que también han jugado un papel importante en el desarrollo de la cultura (Bishop, 1999).

De esta manera, consideramos que las matemáticas, además de ser un instrumento simbólico muy importante, también promueven valores (Greenfield y Bruner 1966; Fasheh, 1982; Lancy, 1983; Bishop, 1999). Por ello, es importante hacer explícitos los valores de las matemáticas para comprender qué tipo de implicaciones tienen en la educación y en la cultura.

En este documento presentamos una experiencia de aula, en la cual, desde una perspectiva histórica, tratamos explícitamente valores de las matemáticas y los abordamos conjuntamente con contenidos conceptuales. De esta manera, nos propusimos acercar a los alumnos a una comprensión no sólo técnica de las matemáticas (Fauvel, 1991; Bishop, 1999). En particular, enfocamos la atención en la dimensión ideológica de los valores asociados con las matemáticas bajo la etiqueta de "racionalismo" (Bishop, 1999).

Asimismo, nos interesa destacar en este artículo la percepción que tienen los alumnos participantes en esta experiencia, acerca del enfoque histórico en el tratamiento de contenidos matemáticos.

MARCO TEÓRICO

Nuestra perspectiva central es que la interacción entre la historia de las matemáticas y la educación matemática ayuda a construir estrategias que contribuyen al proceso de enseñanza de las matemáticas (Fauvel y Mannen, 2000; Sierra, 1997; Meavilla, 2005; Maz, 1999, 2005) y permiten destacar su aspecto cultural (Fauvel, 1991; Bishop, 1999).

Para el diseño de esta experiencia, con relación al desarrollo cognitivo, seguimos diferentes ideas que se articulan en la perspectiva sociocultural de Vygotsky (1995, 2009), la cual considera los procesos de mediación semiótica. Tales procesos de mediación se realizan a través de tres tipos de agentes: las herramientas culturales, los instrumentos psicológicos, es decir, los recursos simbólicos, y la interacción con otros individuos. Para Vygotsky, el proceso de aprendizaje es considerado como un proceso de apropiación de los métodos de acción de una

cultura dada. En esta apropiación los instrumentos psicológicos o simbólicos desempeñan una función esencial.

Para que una experiencia de enseñanza pueda propiciar la adquisición de instrumentos psicológicos debe cumplir tres características fundamentales: Intencionalidad, trascendencia y significado (Feuerstein, 1990). La intencionalidad se refiere a la principal función del mediador, en este caso el profesor, quien debe transformar una experiencia incidental en intencional. Esta intencionalidad se enfocó, en nuestra experiencia, llamando la atención de los alumnos hacia el carácter histórico de los conceptos matemáticos de número y figura geométrica. Nos interesó mostrar a los alumnos que estas nociones aparecieron desde la más remota antigüedad y que fueron desarrollándose en diferentes contextos históricos. La trascendencia se refiere a que la enseñanza debe conducir hacia algo que trascienda el tema específico y apunte hacia la transmisión de la cultura. En nuestro caso, más allá del aspecto práctico de las matemáticas, se señalaron los valores que sustentan el enfoque racionalista de la matemática helena, en cuanto a su carácter intelectual. Con respecto al significado, se llamó la atención sobre la importancia de identificar las propiedades de los números y su relación con las figuras geométricas.

El racionalismo es el valor central de las matemáticas. En la antigüedad la cultura helena dio preeminencia a la razón como la vía más adecuada para el conocimiento, desde entonces y representado paradigmáticamente por las matemáticas, que han privilegiado el razonamiento deductivo, el racionalismo se ha convertido en una ética primaria. Así, "el racionalismo, como opuesto a la tradición, al dogma religioso y a la experiencia o la condición personal, es el principio rector del desarrollo matemático" (Bishop, 1999). Como escribió Kline (1972):

> En su aspecto más amplio las matemáticas son un espíritu el espíritu de la racionalidad. Este espíritu desafía, estimula, vigoriza y dirige las mentes humanas para que den el máximo de sí. Este espíritu pretende influir decididamente en la vida física, moral y social del hombre, pretende responder a los problemas planteados por nuestra existencia misma, se esfuerza por comprender y controlar la naturaleza y hace un gran esfuerzo para explorar y establecer las implicaciones más profundas y extremas del conocimiento ya obtenido (pp. 26-27).

METODOLOGÍA

Se propició la interacción entre los alumnos y entre el profesor y los alumnos como parte del proceso de negociación de significados. Las actividades se resolvieron en parejas. Todas las intervenciones del profesor estuvieron orientadas a describir previamente el contexto histórico y cultural en el cual se desarrolló la aritmética pitagórica y en explicar las ideas esenciales de Pitágoras acerca de los números.

Se explicó previamente a los alumnos el cambio de enfoque de la matemática helena, que dio origen a la geometría deductiva, y que representa una superación

muy importante respecto del carácter empírico, característico de la matemática de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto. Los alumnos no tuvieron un papel pasivo y receptivo sino que participaron activamente. Realizaron una investigación sobre los antecedentes históricos de los sistemas numéricos y acerca del origen del pensamiento filosófico, y de las matemáticas en Grecia. Posteriormente, realizaron actividades en clase cuyos contenidos fueron tomados y adaptados de problemas de la aritmética pitagórica.

LA POBLACIÓN

La población con la que se trabajó fue un grupo de 24 alumnos de primer semestre del bachillerato del Colegio de Ciencias y Humanidades, UNAM, durante las actividades escolares de un curso ordinario. Participaron 12 hombres y 12 mujeres con edades entre 15 y 16 años.

PROCEDIMIENTO

Se llevó a cabo la aplicación de una unidad didáctica (Wittmann, 1984) en la que se utilizaron diversas actividades. La duración fue de 6 horas.

APERTURA DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Con relación al pensamiento numérico de los pitagóricos, el profesor comentó que para ellos los números eran la esencia de la naturaleza pues consideraban que todas las cosas están literalmente compuestas por números, es decir, no distinguían realmente los números de los puntos geométricos, entendidos naturalmente como puntos extensos o esferas minúsculas. Así, no veían distinción alguna entre cuerpo físico y cuerpo geométrico (González-Urbaneja, 2009).

Se les informó que la aritmética pitagórica se prestaba por sí misma a una representación geométrica de los números. Los pitagóricos estudiaron las propiedades de los números y realizaron diversas clasificaciones y acuñaron nombres para los diversos tipos de números. Entre el tipo de números que caracterizaron están los números poligonales. Estos números se van formando como suma de los términos de ciertas sucesiones de números enteros.

DESARROLLO DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Los estudiantes resolvieron algunos problemas de la aritmética pitagórica. Las actividades las realizaron en parejas constituidas por ellos mismos. Se utilizaron dos sesiones de hora y media cada una.

Primera Sesión.

1. Indica los números triangular, cuadrado, pentagonal y hexagonal que siguen a los que aparecen en la Fig. 1, y dibújalos.

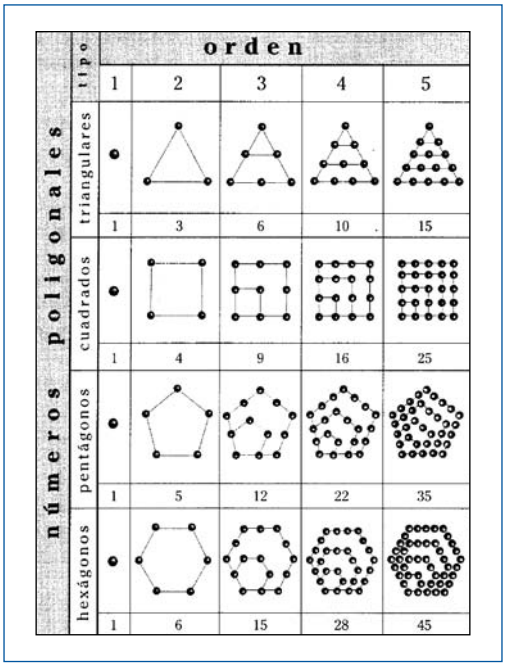


Figura 1
Representación de los números triangulares, cuadrados, pentagonales y hexagonales. Fuente (González-Urbaneja, 2009)

Todos los alumnos reconocen el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en la fig. 1. La mayor parte de ellos vinculan ambos registros de representación y dan continuidad a las secuencias de números poligonales solicitados. No obstante que no se pide en esta actividad, casi la mitad de las parejas (41.6%) proponen expresiones algebraicas para el término n-ésimo.

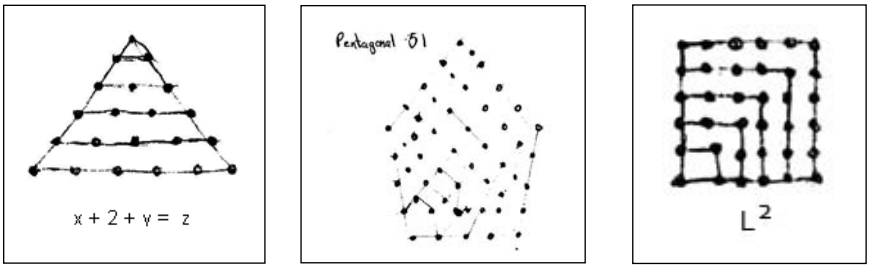


Figura 2, 3 y 4
Diferentes respuestas donde indican el siguiente número triangular, cuadrado y pentagonal

Segunda Sesión.

1. Indicar las series a partir de las cuales se forman los números poligonales que aparecen en la Fig. 1.
2. Escribir los números poligonales que siguen, hasta los números decagonales. Asimismo, escribir las series que permiten formar dichos números.
3. Identificar el patrón geométrico que permite construir las figuras de la tabla (Fig.1).

Prácticamente el 100% de estudiantes responden correctamente las dos primeras preguntas. En general, los resultados encontrados reflejan que los alumnos realizan un cierto análisis estructural de números que comparten un mismo patrón de representación, y obtienen el desarrollo aritmético de los términos de una misma secuencia. Por consiguiente, establecen conexiones entre la secuencia numérica, la secuencia de representaciones geométrica y la secuencia de desarrollos aritméticos. Estos resultados son congruentes con los obtenidos en otros estudios (Castro, 1997; Castro, Rico y Romero (1997).

Asimismo, aplican estas conexiones para caracterizar otros números poligonales. Esto refleja una cierta interiorización del diagrama de la fig. 1, que está operando como un instrumento psicológico en la realización de las actividades. Finalmente, con relación a dibujar el patrón geométrico que permite dibujar a los números poligonales de un mismo tipo, 66.6% de los estudiantes responde correctamente.

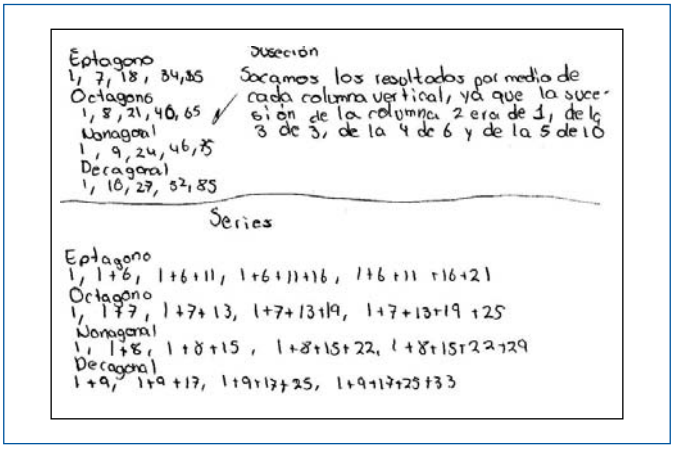


Figura 5
En esta respuesta una pareja de alumnas indica las sucesiones de números poligonales que siguen a los de la figura 1 y las series que forman dichos números.

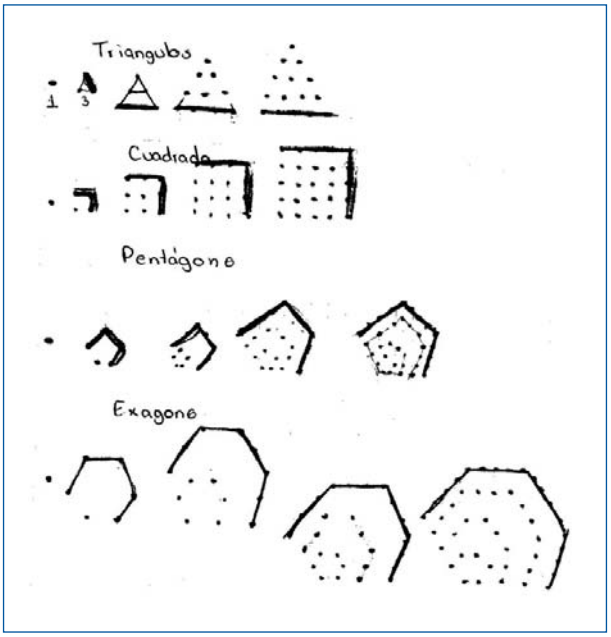


Figura 6
Respuesta que indica el patrón geométrico que permite construir diferentes números poligonales.

CIERRE DE LA UNIDAD DIDÁCTICA. Se les pidió probar un teorema de la aritmética pitagórica. La duración de la sesión fue de una hora.

Tercera Sesión.

> Actividad. Mostrar que: Todo número cuadrado es la suma de dos números triangulares sucesivos.

En ningún caso los argumentos que dan los alumnos pueden ser calificados completamente como una demostración. Sin embargo, todos elaboran pruebas con diferentes características (Balacheff, 2000). El mayor número de alumnos, ocho parejas (66.6%), solo responden poniendo ejemplos. Dibujan casos de dos números triangulares sucesivos y el número cuadrado resultante. Sin embargo, algunas parejas presentan indicios de percibir el carácter general de la tarea. A continuación se muestran algunos ejemplos.

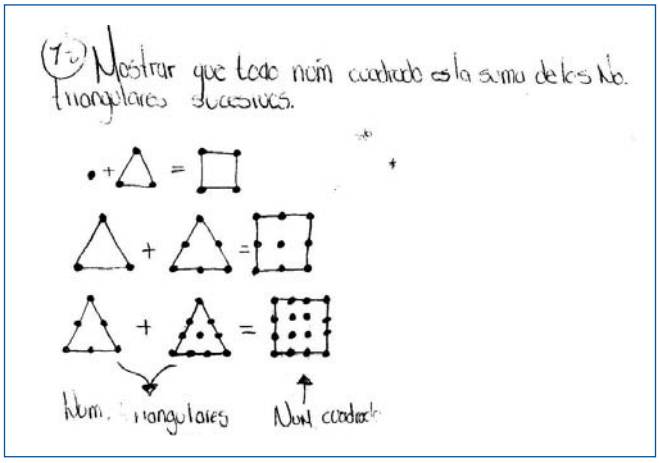


Figura 7
Ilustran gráficamente un cumplimiento general insinuando un proceso inductivo.

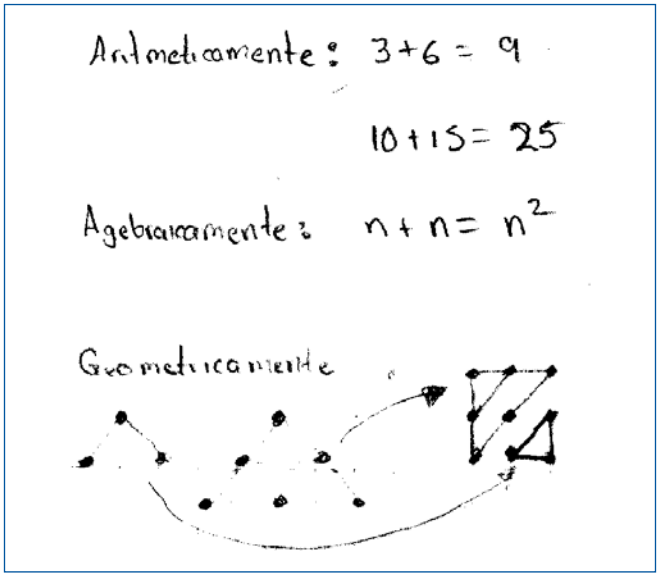


Figura 8
Esta respuesta delimita diferentes ámbitos. Además, intenta una prueba algebraica, aunque con errores, y da un tratamiento de reconfiguración geométrica de los números poligonales en cuestión.

Al término de la secuencia didáctica se administró un cuestionario, con las siguientes preguntas:

1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas? Si ___ No ___ ¿Qué aspecto te resultó interesante?
2. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?
3. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? Si ___ No ___ ¿Cuáles?
4. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? Si ___ No ___ ¿Por qué?

RESULTADOS Y DISCUSIÓN DEL CUESTIONARIO

Pregunta 1. El tratamiento de aspectos históricos de la matemática ¿te despertó mayor interés por las matemáticas?

17 alumnos (71%) respondieron afirmativamente, cuatro opinaron que no les había despertado mayor interés y uno no respondió. Así, una mayoría significativa de alumnos consideraron que el enfoque histórico de la matemática les despertó mayor interés por las matemáticas.

Pregunta 2. ¿Qué aspecto te resultó interesante?

Algunas respuestas son las siguientes:

- ✓ *Pues me resultó interesante en general ya que nos enseñó a ver las matemáticas no solo con aritmética, algebra u otros aspectos si no que nos enseña a ver a las matemáticas en el aspecto histórico desde sus principios y orígenes y esto está muy bien ya siempre hay que conocer las cosas desde sus orígenes y con qué propósito o cómo y por qué surgieron.*
- ✓ *Pues para mí lo interesante de todo esto es el hecho de que en la antigüedad los pitagóricos pensaban que se podía explicar todo por medio de una base numérica y comprendiendo las bases de la matemática se podían explicar toda clase de fenómenos. También es interesante el aspecto de que una persona se haya interesado tanto por el saber más que para ser importante, para comprender todo el mundo que lo rodea, y así poderse explicar mejor la realidad de las cosas.*

En la primera respuesta se observa que el alumno/a se motivó al vislumbrar un sentido sociocultural de las matemáticas, así, expresa su acuerdo cuando dice "... esto está muy bien ya siempre hay que conocer las cosas desde sus orígenes y con qué propósito o como y porque surgieron". En la segunda respuesta, se observa una valoración no usual en los alumnos/as por el conocimiento mismo, cuando dice: "También es interesante el aspecto de que una persona se haya interesado tanto por el saber más que para ser importante, para comprender todo el mundo que lo rodea, ...".

Pregunta 3. ¿Qué diferencia crees que tuvo la matemática griega con respecto a la de las antiguas culturas de Mesopotamia y Egipto?

Algunas respuestas:

- ✓ Que la griega trataba de relacionar todo lo que les rodeaba con las matemáticas y las otras culturas lo usaban solo con lo que utilizaban en su vida cotidiana, fueron teniendo más hambre de saber los griegos a lo largo del tiempo, pero fueron influenciados con las matemáticas de las culturas antiguas.
- ✓ Yo creo que las matemáticas de Mesopotamia y Egipto eran más de práctica aunque tenía que ver con un pensamiento mágico y religioso, mientras que la griega era de razonamiento y criticas intelectual.
- ✓ Creo que la matemática griega influyo en la actualidad debido al uso de teorías y pruebas que demostraran estas, mientras que las culturas de Mesopotamia y Egipto no utilizaban pruebas.

Estas respuestas ilustran rasgos de reflexión muy importantes sobre las matemáticas. Expresan una visión histórica e intercultural de las matemáticas, como construcción histórica de diferentes culturas. Asimismo, hay una percepción de valores de las matemáticas que están asociados con diferentes culturas, con actitudes y valores distintos (Bishop, 1999) La diferencia entre, por un lado, un pensamiento mágico y religioso y, por otro, un pensamiento basado en la critica intelectual, nos muestra la viabilidad de orientar a los alumnos a valorar conscientemente el racionalismo. Así, esta situación abre una valiosa oportunidad de mostrar a los alumnos el tipo de explicación que construyen las matemáticas. Este conocimiento es de la mayor importancia educativa, pues, "si esto no se comprende, el lenguaje y los símbolos de las matemáticas estarán para nuestros jóvenes tan faltos de sentido como una cultura ajena" (Bishop, 1999, p. 90).

Pregunta 4. La dimensión histórica de las matemáticas ¿te hizo ver una dimensión humana de ellas? ¿Cuál?

Algunas respuestas:

- ✓ La dimensión que para mí me hiso ver es que conforme vamos evolucionando nosotros la matemática también lo hace con nosotros que sin ella el mundo no sería como lo conocemos hoy.
- ✓ Como fue evolucionando el hombre tiene una relación con la aparición de las matemáticas, debido a que es una invención humana para ver la realidad de otro modo, pues se quiere tener un control sobre las cosas así que busca método como las matemáticas.
- ✓ Creo que las principales cosa que pude observar es como con el paso del tiempo nosotros los humanos tratamos poco a poco de acuerdo a nuestras capacidades de explicarnos cada vez más nuestro mundo y por medio de las matemáticas encontramos una forma de expresar la realidad con base a diferentes problemas que representan nuestra vida diaria, además de resolverlos.

En estas respuestas se expresan ideas de cambio y progreso, y se otorga un papel relevante a las matemáticas como instrumento de comprensión y control del mundo y de utilidad en la vida cotidiana. Este tipo de respuestas muestran que los alumnos pueden reflexionar sobre aspectos de valores de las matemáticas. De acuerdo con Bishop (1999), entre los sentimientos y actitudes que han impulsado la cultura matemática está el sentimiento de "control". "La búsqueda del conocimiento y las explicaciones de los fenómenos naturales están asociados con un deseo de predecir y, sin duda, la capacidad de predicción es un conocimiento poderoso. En este sentido, el conocimiento se ocupa del control" (Bishop, 1999, p.96). Este sentimiento proporciona una especie de seguridad dentro de un mundo en constante cambio y necesariamente puede contribuir en moldear la personalidad.

Pregunta 5. ¿Te resultaron interesantes los problemas de la aritmética pitagórica relacionados con los números poligonales? ¿Por qué?

- ✓ La verdad si me parecieron muy interesante ya que es otra forma de resolver o más bien de encontrar números está muy bien que haya puesto eso porque eso todavía nos exige más ya que tenemos que pensar más y eso puede hacer que crezca nuestro intelecto en las matemáticas y si está muy padre.
- ✓ Era una actividad muy buena para pensar bien en cómo obtener los números ya que no teníamos formulas y el cómo dibujar la siguiente posición y saber que los números también se pueden representar con algunas figuras geométricas a través de los puntos.
- ✓ Es muy interesante saber que un tema de estos pudiera haber estado relacionado con algo que nunca en mi vida había oído.
- ✓ Te hacían razonar y reflexionar cada número para poder plantear una solución y al hacer tantas operaciones te interesabas tanto que planteabas diversos métodos para llegar a un posible resultado.

Observamos que este tipo de problemas, a pesar de su antigüedad, pueden resultar novedosos e interesantes a los alumnos. Llama la atención que en prácticamente todas las respuestas los alumnos/as expresan apreció por el reto que estos problemas les ponen de pensar, sin tener un aspecto práctico o "útil".

CONCLUSIONES

La estrategia utilizada es una réplica de otra experiencia con resultados análogos (Salinas, 2010), la cual permitió a los alumnos un acercamiento no usual a algunos contenidos matemáticos. En general los estudiantes manifestaron que este enfoque les resultó interesante. Esta experiencia hizo posible que los alumnos establecieran un contacto con el carácter racional del pensamiento matemático, lo valoraran y pusieran en práctica. Relacionaron el carácter abstracto y racional de la matemática helena con el pensamiento filosófico. Así, los alumnos conocieron

que en esta atmósfera racionalista, las matemáticas cambiaron su enfoque, con relación a la que heredaron de las culturas más antiguas. Se dieron cuenta que históricamente las matemáticas han estado relacionadas con diferentes contextos culturales, los cuales han influido en su desarrollo.

Estos resultados similares, con distintos grupos de estudiantes, muestran la plausibilidad de su repetición. Es importante señalar que este enfoque didáctico no implica una tarea fácil. Es necesario un gran esfuerzo y trabajo de parte del profesor en la búsqueda, lectura y selección de los pasajes históricos más adecuados y acordes con el tema y el nivel de los alumnos. Asimismo, un conocimiento del contexto histórico y cultural relativo a los contenidos que se van a abordar.

Sin embargo, esta estrategia muestra que el tratamiento histórico no solo es un medio para el trabajo de los contenidos curriculares sino también culturales, de las matemáticas, no es necesario utilizarlo como un fin en sí mismo (Sierra, 1997; Maz, 1999; Meavilla, 2005). De esta manera, los alumnos no solo interiorizan el contenido matemático, sino que se inician a comprender el origen y desarrollo de los conceptos en el contexto histórico y cultural en el que se crearon.

En las actividades que se llevaron a cabo, todos los estudiantes mostraron alguna capacidad para distinguir patrones aritméticos y geométricos, análogos a los encontrados en otros estudios con metodologías y enfoques distintos a los seguidos aquí (Castro, 1995). Los alumnos, en general, desarrollaron un proceso de interiorización de los diagramas pitagóricos de los números poligonales. Reconocen, el patrón geométrico y aritmético que se encuentra en los diagramas de los números poligonales, y pasan de un registro de representación al otro. En general, vinculan ambos patrones de representación y dan continuidad a las secuencias de números representados. Esta situación les permite realizar tareas donde trabajan con sucesiones y series de números y relaciones entre ellas, es decir hay un desarrollo en el tratamiento del registro de representación aritmético.

El carácter simbólico de tales diagramas, como instrumentos psicológicos, parece propiciar en algunos estudiantes la intensión de usar expresiones generales, pues sin preguntar por ello, casi la mitad de las parejas, proponen expresiones algebraicas para el término n-ésimo. A pesar de que las respuestas son erróneas, esta situación abre la posibilidad de un tratamiento explícito, de parte del profesor, de la necesidad del tránsito del aspecto aritmético al algebraico.

Finalmente, es importante destacar que, esta experiencia es parte de la búsqueda de una educación matemática que no se reduzca a la mera instrucción. Pues, coincidimos con la idea de que la educación matemática, se debe ocupar de establecer opciones que vayan más allá del uso de las simbolizaciones y conceptualizaciones matemáticas, es decir, se ocupe también de los valores (Bishop, 1999).

Reconocimiento: Estancia sabática en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Educación, UCO. Beca otorgada por la Dirección General de Asuntos del Personal Académico de la Universidad Nacional Autónoma de México, Enero-Diciembre de 2011.

REFERENCIAS

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Bogotá Universidad de los Andes.

Bishop, A. J. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidos.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Edit. Comares.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas; *Enseñanza de las Ciencias*, **15** (3), 361-371.

Fasheh, M. (1982). Mathematics, Culture and Authority, *For the Learning of Mathematics*, 3, 2-8

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education". *For the learning of mathematics*, 11(2), 13-16.

Fauvel, J. & Mannen, J. V. (2000). *History in Mathematics Education*: the ICMI study, Dordreght: Kluwer Academic Publisher.

Feuerstein, R. (1990). The theory of structural cognitive modifiability, en B. Presseisen (comp.), *Learning and thinking styles: classroom interaction* (pp. 68-134), Washington, D. C.: National Education Association,.

Greenfield, P. M. y Bruner, J. S. (1966). Culture and Cognitive Growth, en D. A. Goslin (comp.), *Handbook of Socialization Thoeory and Research*. New York: Rand McNally,

González-Urbaneja, P. M. (2009). *Pitágoras. El filósofo del número.* Madrid: Nivola libros y ediciones.

Kline, M. (1972). *Mathematics in Western Culture*, Londres: Pelican.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicológicos*. Barcelona: Paidós.

Lancy, D. F. (1983). *Cross-culturals Studies in Cognition and Mathematics*. New York: Academic Press.

Maz, A. (1999). Historia de la matemática en clase: ¿por qué? Y ¿para qué? En Berenger, Mª. I.; Cardeñoso, J. Mª. y Toquero M. (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Matemáticas en la sociedad.* Granada: Sociedad Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*, Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Meavilla, V. (2005). *La historia de las matemáticas como recurso didáctico*. Badajoz: Federación Española de Profesores de Matemáticas.

Salinas, J. (2010). El uso de la historia de las matemáticas para el aprendizaje de la geometría en alumnos del bachillerato. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T. A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 557-568). Lleida: SEIEM.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En Rico, L. Edt. *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Vygotsky, L. S. (1995). *Pensamiento y Lenguaje.* Barcelona : Paidós.

Vygotsky, L. S. (2009). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*, Barcelona: Crítica.

Wittmann, E. (1984). Teaching Units as the Integrating Core of Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics*, 15, 25-36.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 127-131*

Thales de Mileto y la medición de las pirámides de Egipto

Elisa Quirós Bajo
Alumna del master de educación secundaria de la Universidad de Córdoba

Resumen: *se presenta una propuesta de actividad en el aula para introducir el teorema de Thales utilizando la historia de la matemática como un recurso didáctico.*

Palabras Clave: *Historia de la matemática, Thales de mileto, Educación Matemática, practicas.*

INTRODUCCIÓN

Los estándares del NCTM (2003) señalan que los alumnos deben desarrollar una capacidad para conectar las ideas matemáticas con variados enfoques de un problema. Asímismo, Grugnetti y Rogers (2000) recomiendan conectar la historia de las matemáticas con los tópicos matemáticos de la Enseñanza Secundaria y a modo de ejemplo recomiendan trabajar el teorema de Fermat o el uso de los *Elementos* de Euclides para mostrar como razonamientos geométricos aplicados a la aritmética, etc. A continuación se presenta una propuesta de actividad en la clase para utilizar un hecho histórico como vínculo para el trabajo con conceptos como triángulo y los teoremas de Pitágoras y Thales.

UBICACIÓN CURRICULAR

Curso: 2º ESO
Asignatura: Matemáticas
Grado de dificultad: Medio-bajo

Cómo se puede observar a continuación, 2º ESO es el curso donde se introduce por primera vez el concepto del teorema de Thales, es por eso que vamos a realizar esta actividad con el alumnado.

La actividad se apoya y fundamenta en el Real Decreto 1631/2007 "Clasificación de triángulos y cuadriláteros a partir de diferentes criterios. Estudio de algunas propiedades y relaciones en estos polígonos" para 1º de ESO, y "Utilización de los teoremas de Thales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras" para 2º de ESO (MEC, 2007).

SUGERENCIAS METODOLÓGICAS

1. Exponer la actividad en clase y explicar en qué va a consistir.
2. Breve exposición sobre quien era Thales
3. Individualmente el alumnado lee el texto y trata de comprenderlo
4. Brainstorming o lluvia de ideas.
5. Una vez tengan cierta claridad de la idea, formar grupos de 2 ó 3 personas y representar la figura que determina la altura de la pirámide.
6. Presentar, ante toda la clase, el trabajo realizado.
7. Una vez comprendido el concepto, individualmente, realizará un problema propuesto en clase.
8. Explicación teórica del concepto por parte del profesor.

PUESTA EN PRÁCTICA

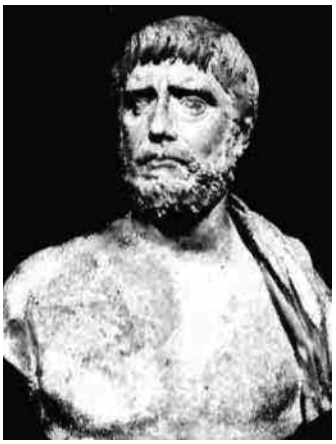
1. Exponer la actividad en clase y explicar los pasos que se van a seguir:

Esta actividad consiste en descubrir, al igual que hizo Thales, cómo calcular la atura de las pirámides de Egipto. Para ello leeremos la historia que desvela cuál fue el método que Thales utilizó y nosotros trataremos de entenderlo y aplicarlo.

2. Breve exposición sobre quien era Thales:

Thales de Mileto: Nació alrededor del año 640 AC en Mileto, Asia Menor (ahora Turquía). Filósofo y matemático griego. Dirigió, en Mileto, una escuela de náutica, construyó un canal para desviar las aguas del Halis y fue maestro de Pitágoras y Anaxímedes.

Thales era un hombre que se destacó en varia áreas: comerciante, hábil en ingeniería, astrónomo, geómetra y era considerado como uno de los siete sabios de Grecia. Destaca porque en sus teoremas geométricos aparecen los inicios del concepto de demostración y se podría decir que son el punto de partida en el proceso de organización racional de las matemáticas.



3. Individualmente el alumnado, leera el texto y tratara de comprenderlo

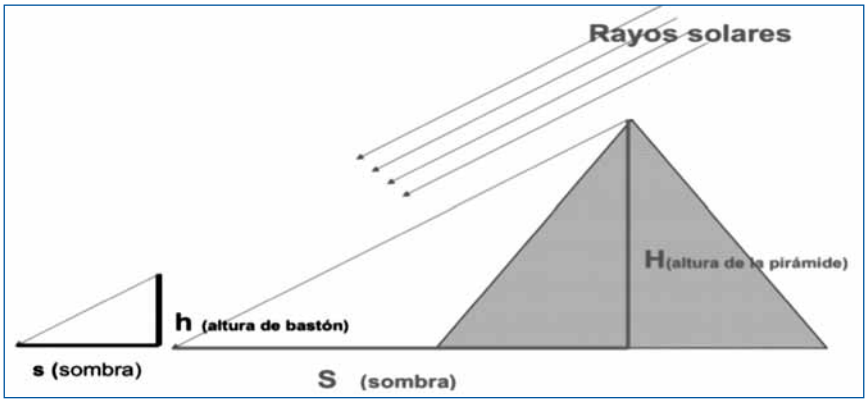
Vemos el proceso de medición de las piramides y para ello este es el texto que se le dará al alumnado, sencillo y fácil para que no les resulte complicado entenderlo.

> THALES DE MILETO Y LAS PIRÁMIDES
>
> Thales se aferró a esa idea: "La relación que yo establezco con mi sombra es la misma que la pirámide establece con la suya.". De ahí dedujo: "En el mismo instante en que mi sombra sea igual que mi estatura, la sombra de la pirámide será igual a su altura." Hete aquí la solución que buscaba. No faltaba sino ponerla en práctica.
>
> Thales no podía efectuar la operación solo. Necesitaban ser dos y el fellah accedió a ayudarlo. Es posible que sucediera de este modo. ¿Cómo llegar a saberlo?
>
> Al día siguiente, al alba, el fellah fue hacia el monumento y se sentó bajo su sombra inmensa. Thales dibujó en la arena un círculo con un radio igual a su propia estatura, se situó en el centro y se puso de pie bien derecho. Luego fijó los ojos en el borde extremo de su sombra.
>
> Cuando la sombra tocó la circunferencia, es decir, cuando la longitud de la sombra fue igual a su estatura, dio un grito convenido. El fellah, atento, plantó un palo inmediatamente en el lugar donde estaba el extremo de la sombra de la pirámide. Thales corrió hacia el palo.
>
> Sin intercambiar una sola palabra, con la ayuda de una cuerda bien tensa, midieron la distancia que separaba el palo de la base de la pirámide y supieron la altura de la pirámide" (De Guedj, 2002; p. 538)

Para que comprendan el texto se les plantea una serie de preguntas que pueden serles útiles.

En primer lugar busca en el diccionario o en internet, las palabras que no comprendas.

¿Se corresponde esta foto con lo que explica el texto? Si no es así, haz un esbozo de lo que plantea Tales.



Fuente: Durán (2008).

¿Crees que con los datos de los que disponía Thales eran suficientes para hallar la altura de la pirámide?

¿Falta algún dato que no se ha mencionado porque se ha dado por supuesto?

¿Podrías predecir en qué va a consistir el famoso teorema de Thales?

4. Brainstorming o lluvia de ideas

Ponemos en común con toda la clase las respuestas a las preguntas anteriores y todo lo que se nos vaya ocurriendo. Con este recurso se obtienen muchas ideas y hace que se descubran cosas nuevas.

5. Una vez más o menos clara la idea, colocarse en grupos de 2 ó 3 personas y representar la figura que determina la altura de la pirámide

En esta parte de la actividad, trabajarán en grupo para poner en común todo lo que saben sobre el teorema de Thales y ver si son capaces de plasmarlo con un dibujo.

6. Presentar, ante toda la clase, el trabajo realizado

Todos los grupos expondrán brevemente lo que han descubierto y han dibujado.

7. Una vez comprendido el concepto, el alumnado y de forma individual, realizará en clase, el problema de la pirámide pero con datos

Si Thales medía 1 metro y 70 cm. y la distancia desde el bastón a la base de la pirámide es de 146,6 m. ¿Cuánto es la altura de la pirámide que estaba midiendo? Razona la respuesta.

8. Explicación teórica del teorema de Thales por parte del profesor

En esta parte y una vez que se ha introducido el concepto del teorema de Thales, el profesor deberá exponer y explicar teóricamente este concepto.

Al terminar la actividad, el alumnado habrá visto y comprendido cómo se aplica el teorema de Thales y además habrá incoporado un conocimiento cultural a su desarrollo cognitivo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

De Guedj, D. (2000) *El teorema del loro*. 1a Ed. Barcelona: Anagrama.

Durán, G. (2008). *Thales de mileto y las piramides*. Consultado el 05/02/2011 en http://lineaserpentinata.blogspot.com/2008/10/thales-de-mileto-y-las-pirmides.html

Gruggnetti, L. y Rogers, L. (2000). Philosophical, multicultural and inerdisciplinary issus. En Fauvel J. y Van Manen, J. (Eds.), *History in Mathematics Education* (pp. 39-62). Dordrech: Kluwer Academic Publishers

NCTM (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Thales-NCTM.

MEC (2007). REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria.

XIV CONGRESO DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Título: **DIVERSIDAD Y MATEMÁTICAS**

Fechas: 4 al 6 de Julio de 2012.

Lugar: Faculta de la Universidad de Málaga.

Teléfonos de contacto:

Comité de Programa: 608 918 680
Comité Organizador: 608 918 680

e-mail: xivceamthalesmalaga@gmail.com

Bloques Temáticos: El congreso se estructurará en los siguientes bloques temáticos:

- **B1)** Matemáticas para la diversidad.
- **B2)** Matemáticas y Competencias Básicas.
- **B3)** Matemáticas, TICs y Diversidad.
- **B4)** Recursos y materiales en Matemáticas.
- **B5)** Diversas Matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje.

Exposiciones: Relacionadas con el mundo de las Matemáticas.

Comunicaciones, Pósters y Talleres:

- **Fecha límite de recepción: 29 de febrero de 2012**
- **Confirmación de aceptaciones: 31 de marzo de 2012**
- **Formatos y modo de envío**: Según modelos y normas disponibles en la página Web del Congreso.

Inscripciones: On-line a través de la página Web del Congreso.

Certificación: 24 horas. Se ha solicitado la homologación de la actividad a la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 133-151*

Historia de las matemáticas e investigaciones matemáticas en secundaria. Algunos fundamentos y ejemplos para la clase

Constantino de la Fuente Martínez
I. E. S. Cardenal López de Mendoza
Sociedad Castellana y Leonesa de Educación Matemática "Miguel de Guzmán"

Resumen: *La historia de las matemáticas puede jugar un papel muy importante en el devenir cotidiano del aula. En este artículo nos centraremos en su utilidad y aprovechamiento para la realización de investigaciones matemáticas escolares en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y Bachillerato.*

Palabras clave: Historia de las matemáticas, investigaciones matemáticas escolares, creación y descubrimiento en matemáticas, resolución de problemas.

Abstrac: *The history of mathematics can play an important role in daily life of the classroom. In this article we will focus on its utility and use for conducting research school mathematics in secondary schools and high school.*

Keywords: *History of mathematics, school mathematics research, creation and discovery in mathematics, problem-solving.*

INTRODUCCIÓN

Como figura en el título del artículo, vamos a analizar el papel de la historia de las matemáticas en la realización de investigaciones matemáticas en ESO y Bachillerato. A este respecto, la historia de las matemáticas es un concepto asentado y conocido por todos, que no necesita aclaraciones, pero puede que no ocurra lo mismo con el otro concepto. Por ello, comenzaremos explicando la idea de *investigación matemática escolar* tal como nosotros la entendemos.

En una primera aproximación estamos de acuerdo con las afirmaciones de Chamoso y Rawson (2001, p. 35) "nos referimos a investigación como un viaje con ideas hasta donde se pueda, de forma libre, con diálogo y discusión entre estudiantes" y entre éstos y el profesorado. En segundo lugar distinguiremos entre

la *resolución de problemas* y las investigaciones. Chamoso y Rawson (2001) hacen una discusión interesante sobre estos términos:

> También se puede considerar la distinción usual entre "Resolución de Problemas" e "Investigación". Lo primero de ello se refiere al hecho de intentar conseguir la solución de un determinado problema utilizando las estrategias y técnicas que parezcan convenientes, o a través de una labor investigadora. Y se suele llamar "Investigación" cuando, además, se anima a ser curioso, a buscar estrategias alternativas, a considerar qué sucedería si se cambian ciertas condiciones o a intentar generalizar el problema (p. 33).

Otra de las características de las investigaciones es que lo relevante no es la solución de la situación propuesta inicialmente, sino lo que se podrá hacer posteriormente con la solución obtenida. El trabajo posterior de extensión, de generalización, de particularizaciones, en definitiva de búsqueda de la estructura interna del problema, variables que contiene, regularidades, patrones, modelos que la rigen o que puede generar, teorías que subyacen o que se intuyen, etc; en resumen, el estudio de las *cuestiones fértiles* que se derivan de la situación inicial y de su solución, son el verdadero contenido de los trabajos que planteamos.

Como veremos más adelante, las investigaciones matemáticas también constituyen un recurso para acercar al aula el proceso de creación y descubrimiento en matemáticas (PCDM), a pesar de que, para algún lector, esto pudiera parecer presuntuoso. A este respecto nos vienen muy bien las palabras de Hadamard (1947):

> Entre el trabajo de un estudiante que trata de resolver un problema de geometría o de álgebra y un trabajo de invención, puede decirse que hay únicamente una diferencia de grado, una diferencia de nivel, tratándose en realidad de trabajos de naturaleza muy análoga (p. 175).

O también las de Taton (1973), cuando se refiere a la *diferencia de nivel* con las palabras siguientes:

> Una de las características de las matemáticas es que la invención empieza muy pronto, desde que un alumno se sitúa ante un problema que debe resolver (...). Si el alumno no se limita a contestar a las preguntas que se le formulan, sino que se esfuerza en hacer observaciones originales relativas al problema, o mejor aún, si él mismo se plantea problemas, en estos casos su trabajo se distingue del del matemático creador sólo en una diferencia de nivel (p. 24).

Por último, acudiremos a Polya para ilustrar la necesidad de hacer un hueco, en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para el acercamiento al PCDM; es decir, a la invención:

> El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la

> intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante (p. 465).

En cuanto a la historia de las matemáticas, debemos aclarar que, en las investigaciones que estamos planteando, nos proponemos utilizarla focalizando la atención en las obras de los personajes, no en su biografía. No excluimos la elaboración de notas biográficas que formen parte del documento final resultado de la investigación, pero nunca constituirán éstas el *cuerpo central* del trabajo de investigación. Sí lo harán, en cambio, el estudio, análisis y reelaboración de alguna demostración original o de algún resultado que sean adecuados al nivel del estudiante o estudiantes que lo realizan.

ORIENTACIONES Y OPCIONES DIDÁCTICAS

La historia de las matemáticas es un buen campo desde el que nos podemos plantear una investigación matemática, pero, a la hora de llevarla a cabo, debemos tomar algunas decisiones previas importantes, que tienen que ver más con los planteamientos didácticos que con el hecho concreto de usar la historia de las matemáticas; por ejemplo:

- Los contenidos matemáticos de la misma, que deben ser adecuados al nivel educativo elegido;
- El uso, o no, de un guión de trabajo elaborado por el profesor, en el que se vayan presentando los principales problemas de la investigación, que deberán resolver los estudiantes. La respuesta a esto estará en función del nivel de autonomía personal del alumnado y de la cantidad de experiencias previas que tengan en este campo. En la mayoría de los casos, tanto en ESO como en Bachillerato, será necesario facilitarles un guión de trabajo orientativo. Sólo cuando estén habituados a este tipo de tareas, tendrán autonomía suficiente como plantearse preguntas originales, nuevos problemas, etc., y se saldrán del guión inicial;
- El tipo de propuesta de trabajo: individual o en grupo. En relación con esta decisión, tendremos que pensar si se presenta y se plantea a todo el grupo clase o a alumnado seleccionado, si el trabajo es obligatorio o voluntario, etc.
- El papel del profesorado en el proceso. Es importante reflexionar sobre nuestro nivel de implicación en el proceso de investigación, contenido y número de entrevistas de seguimiento a llevar a cabo, etc. En cualquier caso, la interacción con el profesorado se debe llevar a cabo a través del *debate científico*. Para profundizar en esta última idea, puede consultarse a Legrand, (1986, 1991, 1996).
- La evaluación del trabajo o informe final de la investigación. Debemos tener claros los criterios de evaluación junto con los descriptores e indicadores de logro, así como la integración de las calificaciones obtenidas en el

proceso global de la evaluación de la materia en ese nivel educativo. A este respecto puede consultarse De la Fuente (2011).

En cuanto a la elección del tema histórico de trabajo, hemos elegido dos contextos diferentes, alrededor de los cuales proponemos los trabajos de investigación:

1. Un personaje relevante dentro de la historia de las matemáticas. Se trata proponer investigaciones, que pueden ser complementarias unas de otras, para profundizar en la obra matemática de ese autor.
2. Un momento histórico de interés dentro del mundo de las matemáticas. Con este enfoque, propondremos investigaciones que tratarán algunos problemas interesantes de la época, profundizando en los métodos de resolución y analizando su significado, utilidad, potencia, limitaciones, etc.

Por último, no debemos olvidar que nuestro principal objetivo es el aprendizaje de matemáticas utilizando como soporte su historia. Ello conllevará que los estudiantes también aumenten su cultura matemática, incorporando a sus saberes personales conocimientos de la historia de esta ciencia; pero las investigaciones propuestas no tienen como finalidad primordial aumentar sus conocimientos de historia de las matemáticas, sino propiciar la profundización en los contenidos matemáticos desde otra óptica diferente a la habitual.

EJEMPLOS ALREDEDOR DE UN PERSONAJE

Siguiendo las orientaciones del punto anterior, hemos elegido, en primer lugar, un personaje, alrededor del cual nos podemos plantear varias investigaciones, de diferentes temáticas y para diversos niveles. Concretamente nos estamos refiriendo a Arquímedes de Siracusa, al que podemos contextualizar también con la lectura previa de la novela de literatura contemporánea, *El contador de arena*, de Gilliam Bradshaw (2006). Esta obra, cuya lectura es una delicia, nos presenta a Arquímedes en plena juventud, inmediatamente después de volver a Siracusa, tras su estancia en Alejandría, donde había asentado y desarrollado su talento, a la vez que había contactado y conocido a los científicos más sobresalientes de la época y se había visto influido por las obras de todos ellos. Sin más dilación, pasamos a presentar algunas propuestas de trabajo relacionadas con Arquímedes:

1. Sobre la obra *Arenario*

Esta obra del genio siracusano es la que tiene una relación directa con la novela mencionada anteriormente, aunque en esta última aparecen varios temas matemáticos más, todos ellos relacionados con Arquímedes, que se pueden escoger para plantear otras investigaciones.

Con el fin de favorecer la contextualización del tema de la investigación, decidimos plantear, a los estudiantes, la lectura previa de la novela. De ella hemos

entresacado algunos párrafos para introducir y motivar algunas de las propuestas de trabajo, así como de la obra original de *Arenario*, que hemos encontrado en Arquímedes (1996). Todos ellos figuran en el guión de trabajo para los estudiantes que presentamos a continuación:

Investigación 1: *Arenario* proviene de *arena*…

> La caja estaba llena de arena, una arena fina, cristalina, casi blanca, que había sido humedecida primero y aplanada después hasta obtener una superficie uniforme y lisa como la de un pergamino de la mejor calidad. Pero la luz del sol, que caía oblicuamente con el atardecer, centelleaba aquí y allá sobre los granos, capturando facetas demasiado pequeñas como para que el ojo pudiera distinguirlas, facetas innumerables que generaban puntos diferenciados de luminosidad, y el joven que las observaba se encontró de repente preguntándose si sería capaz de calcular el número de granos (p. 7).

Así comienza *El contador de arena*, haciendo una amplia referencia a una de las obras de Arquímedes que se conservan; concretamente a *Arenario.*

1.1. Investiga, usando las referencias bibliográficas o de otra manera, el contenido de *Arenario* y su relación con las primeras páginas de la novela. ¿De qué trata? Como ayuda te presentamos un párrafo de esa obra tomado de Arquímedes (1969):

> Hay algunos que creen que el número de granos de arena es infinito en cantidad y por arena entiendo no sólo la que existen en Siracusa y el resto de Sicilia, sino también la que se encuentra en cualquier región habitada o sin habitar. Hay también algunos que, sin considerarlo infinito, creen que no existe una cifra lo bastante grande para exceder a su magnitud. Y está claro que quieren mantienen esta opinión, si imaginasen una masa hecha de arena en otros aspectos tan grande como la masa de la Tierra, incluyendo en ella todos los mares y las cavidades de la Tierra llenadas hasta una altura igual a la de las montañas más altas estarían muchas veces lejos de reconocer que se pueda expresar ningún número para exceda a la magnitud de la arena así conseguida. Pero intentaré demostraros por medio de puntos geométricos que seréis capaces de seguir, que los números nombrados por mi… algunos exceden no sólo al número de la masa de arena igual en magnitud a la de la Tierra llena de la forma descrita, sino al de la masa igual en magnitud al Universo (p. 4).

A veces, si miramos en profundidad el contenido de las novelas, podemos descubrir errores. En *El contador de arena* hay un fallo en las operaciones. Para encontrarlo, consulta en las páginas 7 y 8 las dimensiones de la caja de arena y repasa los cálculos. Como ayuda te podemos decir que, aunque al inicio la autora dice: *la caja estaba llena de arena*, un poco más abajo, en la misma página, escribe: *la arena la llenaba sólo hasta la mitad*.

1.2. ¿Realmente *habría en la caja seis mil por cuatro mil por quinientos granos de arena*? Calcula el verdadero número de granos que cabrían en la caja.

> Tenía ante sí un problema interesante: el número de granos de arena que había en la caja era mayor de lo que podía expresar. […] y su sistema de escritura no disponía de ningún símbolo para el cero que pudiese extender los números indefinidamente. No había manera de concebir un número mayor que una miríada de miríadas. ¿Qué término podía encontrar para expresar lo inexpresable? (Pág. 8).

1.3. ¿Cuál es el mayor número que podía expresar Arquímedes?

1.4. ¿Cómo se escribían los números en esa época? ¿Cuál era la dificultad añadida al no tener símbolo para el cero?

En *Arenario,* Arquímedes se inventa nuevos *órdenes* para poder escribir números muy grandes:

> *Números de primer orden*: desde 10.000 hasta $(10.000)^2=100.000.000$.
> *Unidad de segundo orden*: 100.000.000.
>
> *Números de segundo orden*: desde 100.000.000 hasta $(100.000.000)^2$.
>
> *Unidad de tercer orden*: $(100.000.000)^2=10.000.000.000.000.000=10^{16}$.
>
> *Números de tercer orden*: desde $(100.000.000)^2$ hasta $(100.000.000)^3$.
>
> Así sucesivamente hasta alcanzar el orden 100.000.000 de los números.

1.5. Completa la tabla siguiente, escribiendo los resultados en forma de potencia de 10:

Orden de Arquímedes	Unidad	Desde el nº	Hasta el nº
1º	10^4	10^4	10^8
2º			
3º			
4º			
….	….	….	….
100.000.000º			
n-ésimo			

Al número $(100.000.000)^{100.000.000}$ Arquímedes le llama P y a todos los números desde 1 hasta P los denomina del *primer periodo*.

1.6. ¿Cuántas cifras tiene P?

> Si una miríada de miríada podía ser una unidad, ¿por qué detenerse ahí? ¡Una vez alcanzada una miríada de miríadas de miríadas de miríadas, se podía establecer como nueva unidad y empezar de nuevo. (Pág. 9).

Consideraremos P como la *unidad de primer orden del segundo periodo*. Los números de *primer orden del segundo periodo* van desde P hasta $100.000.000P$. Este número es la *unidad de segundo orden del segundo periodo*. Los números de *segundo orden del segundo periodo* van desde $100.000.000P$ hasta $(100.000.000)^2P$. Así sucesivamente hasta llegar al *orden 100.000.000 del segundo periodo*, cuyo último número es $(100.000.000)^{100.000.000}P$, o también P^2.

1.7. Averigua el número de cifras de P^2, P^3, P^4, … hasta llegar a $P^{100.000.000} = P^{10^8}$.

1.8. Haz una estimación del número de páginas que ocuparía escribir el último de ellos.

"Supongamos que en una semilla de amapola caben diez granos de arena y que en el ancho de un dedo …" (Pág. 7).

La verdad es que la novela no se ajusta a lo que realmente supuso Arquímedes. Éstas fueron sus hipótesis iniciales (tomadas de Arquímedes, 1969):

- La razón entre el diámetro de la semilla de la adormidera y el ancho de un dedo es menor o igual que 1/40.
- La relación entre la razón de los volúmenes de las esferas y la razón de sus diámetros es …
- El valor del diámetro del *cosmos* es menor que … estadios.
- El valor de un estadio es menor que … dedos.
- El número de granos de arena que caben en un volumen igual al de la semilla de la adormidera es menor o igual que …

1.9. Completa cada una de las hipótesis iniciales o resultados de partida que Arquímedes dio como válidos.

> Marco –dijo con impaciencia–, ¿cuál es el mayor número que eres capaz de imaginar? ¿El número de granos de arena que hay en Egipto… no, en el mundo? ¿Cuántos granos de arena se necesitarían para llenar todo el universo? (Pág. 9).

En *Arenario,* el genio siracusano nos muestra cómo calcular, aproximadamente, el número de granos de arena contenidos en el *cosmos* y en la *esfera de las estrellas fijas*.

1.10. Explica el significado que tienen las palabras *cosmos* y *esfera de las estrellas fijas* para Arquímedes.

Seguro que, a estas alturas, tienes ganas de saber cuáles fueron las respuestas verdaderas a estas preguntas. Aquí te las mostramos en palabras reales de nuestro genio (sacadas de Arquímedes, 1969):

> […] el número de granos de arena que contendría una esfera del tamaño de nuestro cosmos es menor que 1.000 unidades de séptimo orden de números.
>
> […] podemos demostrar además que una esfera del tamaño atribuido por Aristarco a la esfera de las estrellas fijas contendría en número de granos de arena menor que 10.000.000 unidades de octavo orden de los números.

1.11. Averigua qué números son. Exprésalos en forma de potencia de 10.

> Nadie, excepto Arquímedes, se atrevería a formular una pregunta tan descabellada como aquella. Y a nadie más se le ocurriría una respuesta tan incomprensible. […] ¿No debería aquel joven lunático olvidarse de tales interrogantes y emplear su cabeza en cuestiones más prácticas? (Pág. 11).

Éstas eran algunas de las opiniones de Marco, el esclavo, sobre su joven amo.

1.12. Ahora que has visto, en profundidad, el problema que se planteó nuestro genio, contesta a la pregunta que se hace su criado al final de la cita.

Como puedes ver en la obra *Arenario* de Arquímedes, se menciona a un personaje llamado Aristarco. También aparece en *El contador de arena* en más de una ocasión, concretamente en las páginas 38 y 133-134. Te presentamos el pasaje de una de ellas:

– Cuéntame otra vez la hipótesis de Aristarco –dijo. […]

– Dice que la Tierra gira alrededor del Sol siguiendo la circunferencia de un círculo.

– ¿Y los planetas también?

– En efecto.

– ¿Y las estrellas? […]

– ¡No! Esa es la parte más interesante –dijo Arquímedes, apasionándose con el tema-. Aristarco sostiene que el universo es mucho, mucho más grande de lo que nadie pueda imaginar. Dice que el círculo completo que describe la órbita terrestre no es más que un punto en comparación con el tamaño de la esfera de las estrellas fijas (Pág. 134).

Como puedes imaginarte esto es algo absolutamente novedoso, teniendo en cuenta que habrían de pasarse alrededor de 1800 años hasta que Copérnico retomara la idea.

1.13. ¿Quién fue Aristarco de Samos, también llamado el Copérnico de la antigüedad? Explica su teoría sobre el movimiento de los astros.

2. Sobre el *Stomachion*

A continuación presentamos el guión de una investigación sobre otro tema relacionado con Arquímedes: el rompecabezas denominado *Stomachion* o *Dolor de tripa*, que muchos estudiosos han considerado, a lo largo de la historia, original suyo. La aparición de este *juego* entre las páginas del palimpsesto nos asegura su relación directa con el genio siracusano. En este caso, también introducimos las propuestas de investigación con párrafos de *El contador de arena*:

Investigación 2: Geometría con un rompecabezas…

> En Alejandría había comprado un juego para su padre, que consistía en un conjunto de piezas de marfil cortadas en cuadrados y triángulos. Uniéndolas, se podría formar un cuadrado, un barco, una espada, un árbol o cualquier otra figura entre un centenar. El rompecabezas era una delicia para cualquier geómetra (Pág. 37).

Vamos a acercarnos al juego creación de Arquímedes, que se denomina *Stomachion.* Consiste en un cuadrado dividido en 14 piezas poligonales: once triángulos, dos cuadriláteros y un pentágono, como en la figura 1.

Figura 1

2.1. La primera cuestión que se nos ocurre es calcular las áreas de cada una de las figuras que componen el *puzle*. ¿Qué fracción del área del cuadrado representa cada una de las áreas de las figuras que lo componen?

La cuestión anterior no es sencilla y seguro que ha supuesto el empleo de bastante tiempo para responderla en toda su extensión. Te proponemos ahora un método distinto para responder a la pregunta anterior; se trata de utilizar el denominado Teorema de Pick.

2.2. El teorema de Pick sirve para calcular el área de una figura poligonal cerrada (como en la figura 2) cuyos vértices están situados en una cuadrícula cuadrada, en función del número de puntos de la cuadrícula que están en el interior de la figura (los coloreados de rojo) y del número de puntos (de la cuadrícula) que están en su frontera (los coloreados de negro). Investiga, encuentra su enunciado, y aplícalo a las piezas que forman el *stomachion* para calcula el área de cada una.

2.3. George Alexander Pick fue un matemático austríaco que vivió entre 1859 y 1943. Averigua los principales datos de su vida y haz una pequeña biografía. Incluye en ella los principales resultados matemáticos debidos a él.

2.4. Fíjate en la figura 3, en la que cada una de las piezas del stomachion tiene un número en su interior. Interpreta su significado y relaciónalo con las respuestas que has dado a dos de las últimas cuestiones planteadas (2.2 y 2.3).

Una vez encontradas las áreas, vamos a plantearnos otra cuestión, que nos ayudará a profundizar en el rompecabezas y a conocer mejor su estructura.

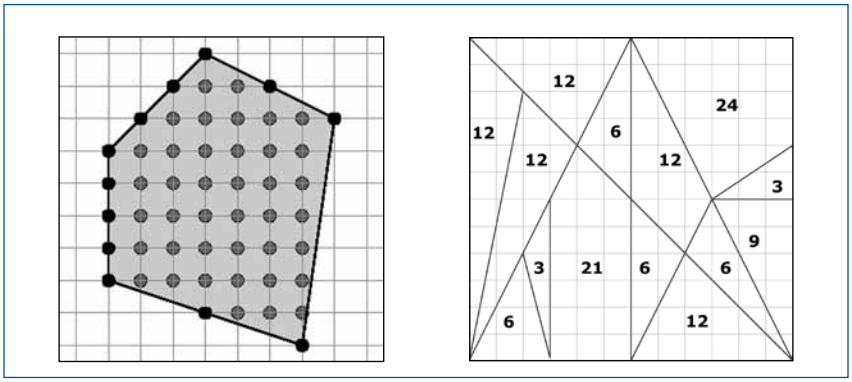


Figura 2 y 3

2.5. Con la ayuda de la imagen del *stomachion* dentro de la cuadrícula, calcula las longitudes de los lados de cada una de las piezas. Prepárate para obtener números irracionales como resultado de algunas de ellas.

Otro de los usos del *stomachion* fue la construcción de figuras determinadas, usando todas las piezas que lo componen. En las figuras 4A y 4B te presentamos algunas de ellas; en unas se han construido diferentes tipos de polígonos y en la otra una con forma de elefante:

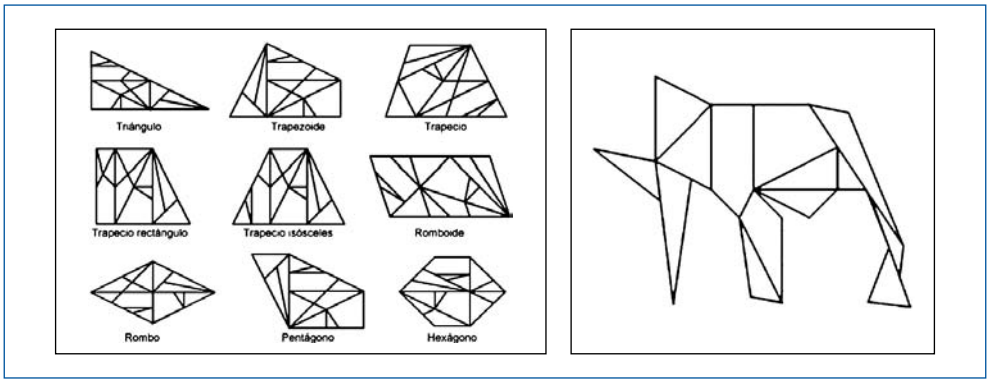


Figura 4a y 4b

A sabiendas de las dificultades que conlleva el asunto, te vamos a proponer la construcción de algunas figuras con las piezas del *stomachion*. No es la actividad más importante, desde nuestro punto de vista, por lo que si no lo consigues no te desesperes. En cualquier caso, puedes usar lo que sabes de las áreas y de los lados de las piezas.

2.6. Reparte las 14 piezas para formar las figuras que se indican en cada caso, cumpliendo las condiciones que se especifican:

a) Dos triángulos que tengan la misma superficie.

b) Dos triángulos escalenos tales que la superficie de uno sea doble que la del otro.

c) Dos triángulos escalenos tales que la superficie de uno sea triple que la del otro (el pequeño es un triángulo escaleno rectángulo).

d) Tres triángulos (A, B y C) de manera que la superficie de C sea triple que la de A, y la de B sea doble que la de A.

2.7. Haz lo mismo de antes, para formar:

a) Tres polígonos de manera que tengan la misma superficie.

b) Cuatro polígonos de manera que tengan la misma superficie.

c) Seis polígonos de manera que tengan la misma superficie.

d) Tres polígonos de manera que sus superficies sean tres números múltiplos de 12.

e) Cinco triángulos de manera que sus superficies sean cinco números múltiplos de 6.

Volvamos ahora a la principal cuestión a resolver con el *stomachion*

Como puedes ver en la figura 5, hay muchas formas de colocar las piezas para obtener el cuadrado inicial; aquí te presentamos 4 de ellas. Seguro que estás pensando lo mismo que nosotros: ¿de cuántas formas lo podemos conseguir? Te vamos a dar la solución al problema: existen 536 maneras de colocar las piezas dentro del cuadrado, considerando idénticas las soluciones que son equivalentes mediante rotaciones o reflexiones. Si estas formas se consideraran distintas, la respuesta sería entonces 17152.

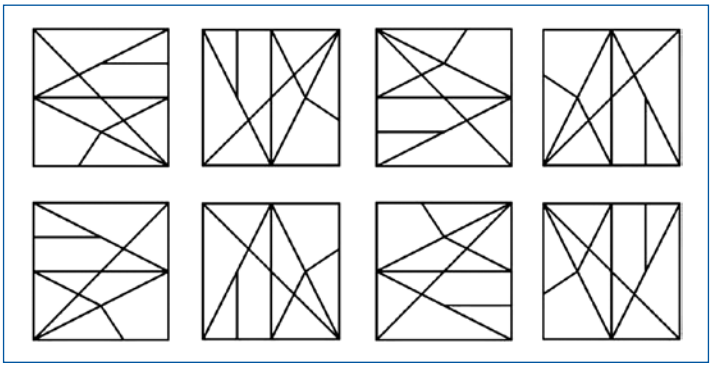


Figura 5

2.8. Investiga hasta donde puedas e intenta acercarte al número de posibilidades. A ver cuántas de ellas eres capaz de encontrar y explicar razonadamente. Para ello puedes tomar la figura del lateral como punto de partida. ¡Qué haya suerte!

Investigación 3: El número π

Para completar esta profundización sobre las matemáticas de Arquímedes sin alargar la extensión de este artículo, los lectores pueden analizar, en De la Fuente (2010), otra investigación que tiene como tema el número π y los métodos utilizados por el genio siracusano para obtener las famosas acotaciones de π: $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + 1 / 7$.

Ni que decir tiene que hay infinidad de ejemplos de otros personajes que nos podrían servir para los mismos propósitos:

- Euclides, para hacer un estudio de algunos de los contenidos de sus *Elementos*: Teorema de Pitágoras y su recíproco, números primos, proporción áurea, postulados de la geometría, etc.
- Al Jwuarizmi. Se trata de profundizar en los métodos geométricos de este autor para la resolución de ecuaciones de segundo grado, comprobando la equivalencia entre la equivalencia entre las ideas de completar el cuadrado geométrico y la de completar el cuadrado algebraico o aritmético.
- Pascal. El análisis de la correspondencia entre Pascal y el Caballero de Meré y la revisión y resolución de los problemas que dieron lugar al nacimiento del cálculo de probabilidades, puede ser una interesante propuesta para una investigación matemática en ESO o Bachillerato.

3. Ejemplos sobre un momento histórico

Después de las investigaciones matemáticas vertebradas alrededor un personaje como Arquímedes, vamos a presentar algunos ejemplos más tomando como contexto generador un momento histórico. En este caso hemos elegido la primera mitad del siglo XVII, unos años antes del alumbramiento simultáneo del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz. Los temas de trabajo tienen que ver con los métodos, esencialmente algebraicos, que se utilizaban para resolver el problema del cálculo de la recta tangente a una función en un punto y el de otras rectas relacionadas con ella.

Sobre el método del círculo de Descartes para el cálculo de la recta normal

El cálculo de la recta tangente o normal a una curva en un punto es un simple ejercicio si tenemos como herramientas disponibles las derivadas, pero ¿cómo se calculaban antes de aparecer estas últimas? Esta cuestión la resolvieron de forma

algebraica algunos grandes matemáticos como Descartes o Fermat, aunque sus métodos no siempre se atenían al rigor requerido; pero, con mayor o menor fortuna, pusieron las primeras piedras sobre las que, posteriormente, se alumbraron los conceptos que las resolvieron de forma definitiva. Uno de estos procedimientos es el *método del círculo de Descartes para calcular la recta normal*, que su autor describe con bellas palabras en el libro II de la edición de 1637 de *La Geometría*:

Creo haber dado aquí todo lo que se requiere para los elementos de las líneas curvas, cuando haya expuesto la manera general de trazar líneas rectas que las corten en ángulos rectos en los puntos que de ellas se elijan.

Y me atrevo a decir que éste es el problema más útil y más general no sólo que yo conozca, sino que yo haya anhelado jamás conocer en Geometría (p. 423) .

Presentamos, a continuación, un guión para profundizar en este tema:

Investigación 4: El método de Descartes y sus aplicaciones

4.1. Consultar la bibliografía adecuada para describir pormenorizadamente el método del círculo de Descartes para calcular la recta normal a una curva en un punto, por ejemplo en Grattan-Guinnes (1984). Enumera después cuáles son las ideas clave del procedimiento.

4.2. Algún matemático posterior a Descartes ha dicho respecto a su método:

- Es un método algebraico-geométrico que resuelve el problema sin entrar en "el peligroso mundo de lo infinitamente pequeño".
- Reduce el problema del cálculo de la recta normal (y el de la recta tangente) a la búsqueda de soluciones dobles de ecuaciones algebraicas.
- Cuando la ecuación de la curva no es una ecuación algebraica sencilla, el método se complica por los laboriosos cálculos que hay que hacer para determinar la solución doble de la ecuación.

Analiza las frases anteriores y da argumentos, según tu opinión, para estar de acuerdo o en desacuerdo con ellas.

Descartes aplicó su método para calcular la recta tangente y la normal a una elipse centrada en el origen.

4.3. Demuestra, utilizando el método de Descartes, que la recta normal a una elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ en el punto (x_0, y_0) tiene por ecuación $y - y_0 = \frac{a^2 y_0}{b^2 x_0}(x - x_0)$.

4.4. Utilizando el mismo método, demuestra que la ecuación de la recta tangente en el mismo punto de la parábola tiene por ecuación $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

Como hemos podido comprobar, la recta tangente a una curva en un punto se caracteriza porque el punto de tangencia es solución doble entre la curva y ella. Vamos a profundizar en esta idea y a demostrar que se cumple en cualquier función polinómica. Para ello puedes seguir las siguientes orientaciones:

4.5. Considera la función cuadrática $y = x^2 - 4x + 3$. Comprueba que la recta tangente a esta función en el punto de abscisa x=4 tiene un contacto de orden 2 con la función en el punto de tangencia. Verifica que se cumple la misma propiedad para x=1.

4.6. Investiga si es verdadera la propiedad anterior para otra función cuadrática concreta.

4.7. Enuncia la propiedad anterior para una función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ cualquiera y demuéstrala.

Hemos demostrado que la recta tangente a una función cuadrática en uno cualquiera de sus puntos cumple la propiedad de que el punto de contacto entre ellas, que es el punto de tangencia, es solución doble del sistema.

Ahora se trata de demostrar que esa recta es la única que lo cumple.

4.8. Sea una función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ y todas las rectas que pasan por el punto $(p, f(p))$ de la misma; demuestra que la única recta que tiene un contacto de orden dos con la función es la recta tangente a la función en ese punto.

Esta propiedad, que hemos demostrado para las funciones polinómicas de segundo grado, las parábolas, también se cumple para otras funciones polinómicas de grado diferente a dos. Esto es lo que se trata de demostrar a continuación.

4.9. Sea la función $f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$. Comprueba que se verifica la propiedad anterior para x=0; es decir, que la recta tangente a la función en ese punto es la única recta que, pasando por ese punto, tiene un contacto de orden dos con la curva.

4.10. Dada una función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, y un punto cualquiera de la misma $(p, f(p))$, demuestra que la recta tangente a la cúbica en el punto dado tiene un contacto de orden 2 con ella (para ello puedes utilizar la regla de Ruffini) y que es la única recta que lo cumple.

4.11. Dada una función polinómica $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ con $a_n \neq 0$ demuestra que la recta tangente en cualquiera de sus puntos $(p, f(p))$ tiene un contacto de orden 2 con la función en el punto de tangencia y que es la única recta que lo cumple.

Sobre la Regla de Hudde

La aplicación del método de Descartes, mencionado anteriormente, tenía una dificultad grande cuando la ecuación a resolver, para calcular la solución doble, era complicada. Para paliar este inconveniente se utilizaba la denominada Regla de Johann Hudde (1628-1704), que fue publicada por Frans van Schooten, en una carta en su edición latina de 1659 de *La Géométrie* de Descartes. La mencionada regla aparece con el siguiente enunciado:

> Si una ecuación tiene dos raíces iguales y multiplicamos la ecuación por una progresión aritmética arbitraria de manera que el primer término de la ecuación queda multiplicado por el primer término de la progresión y así sucesivamente, entonces digo que el producto obtenido será una ecuación que tiene de nuevo la raíz dada.

En De la Fuente (2011), el lector interesado puede ver una propuesta de investigación para un nivel de 4º ESO sobre este tema. En ella se pueden observar las conexiones entre distintos contextos matemáticos, como son las ecuaciones de segundo grado, las progresiones aritméticas y las funciones cuadráticas (toda la investigación se plantea para funciones y ecuaciones de segundo grado). También se puede ver, en profundidad, el efecto transformador de la Regla de Hudde en ecuaciones de segundo grado con una solución doble y la transformación que tiene lugar en las parábolas correspondientes. En el presente artículo, vamos a presentar otro guión diferente, que podría plantearse para estudiantes de bachillerato:

Investigación 5: La Regla de Hudde

5.1. Johan Hudde (1628-1704) desarrolló un ingenioso método para encontrar soluciones dobles de ecuaciones algebraicas, denominado históricamente como *Regla de Hudde*. Haz una breve reseña biográfica de este personaje y encuentra el enunciado de la famosa *Regla.*

Nuestro primer objetivo va a ser demostrar la veracidad de la *Regla* para ecuaciones polinómicas de cualquier grado. Para ello, puedes contestar a las preguntas siguientes o ir directamente a la tarea 5.5.

5.2. Sea una ecuación de segundo grado con solución doble, por ejemplo $ax^2 + bx + c = 0$. Calcular el valor de la solución.

Por otra parte, podemos escribir la ecuación como $(x - a)^2 = 0$, siendo la solución doble, o, desarrollándola, como $E_1 \equiv x^2 - 2ax + a^2 = 0$. Si multiplicamos los coeficientes de esta última por los términos de la progresión aritmética (p.a.) p, p+d, p+2d, obtendremos una nueva ecuación E^2 que, según la Regla de Hudde, también tiene como solución el valor a.

5.3. Demuestra que a es solución de E_2 y calcula también la otra solución (cuando E_2 sea de segundo grado).

Una vez demostrada la veracidad de la Regla de Hudde para ecuaciones de segundo grado, pasaremos a ecuaciones de tercer grado. Para ello debemos tener en cuenta que una ecuación de tercer grado con una solución doble es de la forma $E1 \equiv (x - a)^2(x - b) = 0$.

5.4. Desarrolla la expresión de E_1 en forma de suma y multiplícala por la p.a. p, p+d, p+2d, p+3d. Demuestra, con la Regla de Ruffini o con cualquier otro método, que a es solución de la ecuación E_2 , transformada de E_1 por la p.a.

Tenemos la demostración para ecuaciones de grado tres. Para llevar a cabo la demostración para ecuaciones de grado n, conviene acudir a Grattan-Guinnes (1984) o González Urbaneja (1992), donde se esboza la demostración que buscamos.

5.5. Consultando la bibliografía adecuada, demuestra que si una ecuación de grado n, E_1, tiene una solución doble a, entonces la ecuación E_2, transformada de E_1 por una p.a., también tiene como solución el valor a.

Para comprobar la potencia de la *Regla,* vamos a aplicarla para obtener resultados que te resultarán familiares:

5.6. Demuestra que si tenemos un polinomio de grado n, podemos obtener su derivada si lo transformamos por una p.a. adecuada.

5.7. Demuestra que si r es raíz doble del polinomio p(x), entonces también es raíz de la ecuación p´(x)=0, donde p´(x) es la derivada del polinomio p(x).

5.8. Demuestra el siguiente resultado, utilizando la *Regla de Hudde*:

Si en $x = a$ el polinomio $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ tiene un máximo o mínimo relativo, entonces la función $g(x) = f(x) - f(a)$ verifica que $g'(a) = 0$.

Por último, vamos a acudir a otra referencia bibliográfica para ver otras maneras de enunciar la famosa *Regla.*

5.9. Consulta Boyer (1996) y relaciona los enunciados que aparecen en él como *Reglas de Hudde* y el que hemos utilizado nosotros hasta ahora.

Al igual que cuando elegimos como elemento motivador un personaje, para el caso de elegir momentos históricos también hay una variedad inmensa de ellos. Presentamos algunos otros que pueden resultar adecuados para los niveles de Secundaria (ESO o Bachillerato):

- Matemáticas en la primera mitad del siglo XVI en Italia. Se trata de analizar las aportaciones de Del Ferro, Del Fiore, Tartaglia, Cardano y Ferrari, en la resolución de ecuaciones de grado mayor que dos, utilizando radicales, estudiando la controversia entre estos personajes alrededor del tema.
- Matemáticas y matemáticos en Alejandría. Para esta investigación se pueden escoger varios personajes vinculados a esta ciudad y profundizar en sus principales obras: Euclides, Eratóstenes, Apolonio, Herón, Diofanto, Pappus, Arquímedes, Hipatia, etc.

Algunas reflexiones didácticas finales

Una vez presentada la propuesta de aula, queremos finalizar volviendo a la reflexión personal sobre nuestra práctica:

En primer lugar dejar constancia de un hecho habitual en clase de matemáticas: entre nuestros objetivos didácticos casi nunca está la preparación de los estudiantes para la invención y el pensamiento creativo. Esta deficiencia de nuestra actual educación matemática debe ser paliada; por ello no nos cansaremos de repetir las palabras de G. Polya (1966), que pueden ser un buen revulsivo para ello:

> El resultado del trabajo creador del matemático es el razonamiento demostrativo, una prueba, pero la prueba se descubre por razonamiento plausible, es decir, por intuición. Si esto es así, y yo lo creo, habrá un lugar para la intuición en la enseñanza de las matemáticas. La educación debe prepararnos para la invención o, al menos, para el gusto por ella. En cualquier caso, la educación no debe suprimir los gérmenes inventivos en el estudiante (p. 465).

Este aspecto, tan olvidado actualmente, es uno de los objetivos que nos proponemos al plantear las investigaciones matemáticas en los niveles preuniversitarios. En este sentido, encajan muy bien las palabras siguientes:

> Es hora de orientar el tiempo que dedicamos a adiestrar en la disciplina y la obediencia hacia el placer del descubrimiento. Es hora de cultivar la imaginación y el pensamiento divergente. Es hora de permitir a los alumnos y alumnas que se planteen sin complejos cualquier pregunta por extraña que parezca, que traten de dar un respuesta en la medida de sus posibilidades e intuyan la forma de abordarla en profundidad (Usón y Ramirez, 2006, p. 60).

Por otra parte, nos movemos en un ambiente escolar en el que "sobresalen las pocas ocasiones del desarrollo normal del aula en las que los profesores ayudan y dirigen a sus alumnos en la destreza de escribir el proceso de resolver problemas de distintas formas" (Chamoso y Rawson, 2001, p. 38). Si realmente esta es la situación habitual del aula, en la resolución de un problema, se hace necesario que nuestra intervención, que es de mucho mayor calado que la resolución de un problema, no deje de lado esta competencia y la situación cambie:

> "Poca expresión escrita. Los estudiantes normalmente no escriben mucho, y lo que escriben no suele expresar normalmente lo que han pensado. No suele ser significativo. Tampoco lo hacen ordenadamente. Éste es un aspecto de la enseñanza-aprendizaje sobre el que se necesita mucha información" (Chamoso y Rawson, 2001, p. 38).

Precisamente por estar de acuerdo con el hecho de que durante el proceso de investigación de los estudiantes no hay apenas expresión escrita, es por lo que las investigaciones también se plantean entre sus objetivos didácticos la *redacción de documentos científicos*, otra de las grandes deficiencias de nuestra actual educación

matemática. En ellos se pretende que aparezca la narración ordenada del proceso de investigación, en forma de informe detallado, en el que se recojan las ideas y los resultados más relevantes del proceso, teniendo como ejes principales la recopilación exhaustiva, la presentación rigurosa (porque el rigor no es esencial en los momentos en que se originan las ideas, sino en su tratamiento posterior) y las valoraciones personales sobre el mismo. De esta manera, el estudiante reflexionará sobre el proceso y sobre los resultados conseguidos, produciéndose una mayor huella de aprendizaje en su mente.

Por último, finalizaremos animando a nuestros lectores a llevar a la práctica alguna de las propuestas presentadas, porque:

> Investigar por el placer de investigar sería ya, en sí mismo, un excelente objetivo. Construir las matemáticas a partir de ese proceso es además un reto. Cuando se deja que la libertad guíe los pasos, un sinfín de posibilidades se abre ante nosotros. Un mundo desconocido para el alumno, y muchas veces para el profesor […] (Usón y Ramirez, 2006, p. 59).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arquímedes, (1969). Arenario. En Newman, J. R. *El Mundo de las Matemáticas. Sigma.* Vol. 4, pág. 4-17. Edic. Grijalbo, Barcelona.

Boyer, C.B. (1996). *Historia de la matemática.* Alianza Editorial, Madrid.

Bradshaw, G. (2006). *El contador de arena*. Edit. Salamandra, Barcelona.

Chamoso, J. Mª y Rawson, W. B. (2001). En la búsqueda de lo importante en el aula de Matemáticas. *Suma. revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, 36, 33-41.

De la Fuente C. (2010). Arquímedes de Siracusa. La deslumbrante sabiduría y la cautivadora humanidad de un genio. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 64, 63-70.

De la Fuente C. (2011). La evaluación de las investigaciones matemáticas escolares con estudiantes de ESO y Bachillerato. Propuesta para la clase. *UNO*, 57, 43-57.

Grattan-Guinness, I. (1984) *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910. Una introducción histórica.* Alianza Editorial, Madrid.

Hadamard, J. (2011). *Psicología de la invención en el campo matemático.* Madrid: Real Sociedad Matemática Española.

Legrand, M. (1986). *Genèse et étude sommaire d´une situations codadidactique: le debat scientifique en situation de enseignement*. Colloque franco-allemand de Didactique des Mathématiques et de l´Informatique. La Pensée sauvage.

Legrand, M. (1991). Les compétences scientifiques des etudiants sont elles indépendantes de la facon dont nous leur presentonsla sciencie? *Gacette des mathématiciens,* Suplément nº 48

Legrand, M. (1996). El Debate científico en clase de matemáticas. *La enseñanza de las matemáticas: puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica*. Frouard (Francia): Ed. Topiques.

Polya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos

Taton, R. (1973). Causalidad y accidentalidad de los descubrimientos científicos. Barcelona: Labor

Usón, C. y Ramírez, A. (2006). En torno al Triángulo Aritmético que algunos llaman de Pascal. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas,* 53, 53-60.

Materiales en internet:

Para estudiar el proceso llevado a cabo por Arquímedes para aproximarse al valor de π se pueden consultar varias páginas de internet, entre ellas la siguiente:
http://itech.fgcu.edu/faculty/clindsey/mhf4404/archimedes/archimedes…

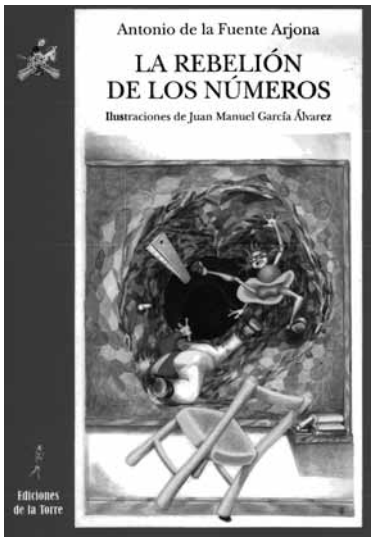
Sobre el Stomachion se pueden consultar las páginas web:
http://www.maa.org/editorial/mathgames/mathgames_11_17_03.html
http://www.math.nyu.edu/~crorres/Archimedes/Stomachion/intro.html

El palimpsesto tiene su propia página en internet, con mucha información relativa al documento: www.archimedespalimpsest.org/

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 153-154*

LA REBELIÓN DE LOS NÚMEROS

Mª Dolores Hidalgo Ariza



Antonio de la Fuente Arjona
Ediciones de la Torre, Madrid.
Noviembre 2010 (primera edición)
ISBN: 978-84-7960-471-9
93 páginas

Antonio de la Fuente Arjona, actor y autor de teatro, nos presenta " La Rebelión de los Números" editada por ediciones de la Torre en Noviembre de 2010, que viene a ser un libro que completa una colección compuesta por otros tres ejemplares llenos de magia, juegos, aventuras, misterio, fantasía…

Este gran libro es una forma muy atractiva de llevar las matemáticas al aula de una forma lúdica y con un toque de humor, el teatro se convierte en una herramienta muy útil para el docente para trabajar conceptos de aritmética, geometría y álgebra, entre otros, entre alumnado de 6-12 años.

Teatro y matemáticas, una combinación perfecta, para enseñar matemáticas, para hacerles entender la gran importancia de las matemáticas en nuestro mundo, la necesidad de ellas en nuestro día a día.

Un libro muy divertido, que intenta acabar con tópicos del tipo a "Las Mates son un rollo", en él los números hartos de que nadie les quiera ni les comprendan y siempre les rechacen sin conocerlos, intentan revelarse, para ello, secuestran al profe de mates, entonces 6 niños y niñas de la clase, llamados la panda de "Los Últimos de la Clase" intentarán rescatar a su profe, para lo cual tendrán que resolver diversos enigmas, acertijos y superar diversas pruebas, para lo cual tendrán que saber matemáticas.

Estos niños y niñas, responden al prototipo de alumnado que nos encontramos en las aulas, un alumnado heterogéneo, con distintos intereses, al cual las matemáticas les aburren, le parecen difíciles y no les encuentran un sentido práctico en su vida diaria, pero todo cambia al sumergirse en aventura tras aventura, cada cual más interesante y en las cuales descubren que las matemáticas forman parte de su vida: la alarma del reloj que les despierta todas las mañanas, el número que tiene el autobús para ir a la escuela, los números de teléfono, etc. Poco a poco se pone de manifiesto que sin las matemáticas el mundo sería un caos e incluso después de vivir las numerosas aventuras descubren que las matemáticas pueden ser muy divertidas

Además desde esta obra se fomentan valores como el respeto a las diferencias, tolerancia, compañerismo, solidaridad, etc.

Por lo tanto y sin más recomendar esta divertida obra, en especial, a aquellos docentes que día a día tienen que enseñar matemáticas en sus aulas, ya que será una eficaz herramienta en la escuela para motivar al alumnado.

Epsilon - *Revista de Educación Matemática* *2011, Vol. 28(1), nº 77, pp. 155-164*

Algunos hechos históricos en la resolución de problemas, sobre el origen del cálculo integral

F. Damián Aranda Ballesteros
Manuel Gómez Lara

1. ALGUNAS OBSERVACIONES SOBRE LA CUADRATURA

Los matemáticos antiguos estaban condicionados y limitados por las construcciones que podían obtener con la regla y el compás. Entre los problemas más difíciles de resolver, en el siglo V a.C., se encontraban la cuadratura o dar forma de cuadrado a una figura plana. Para ser exactos:

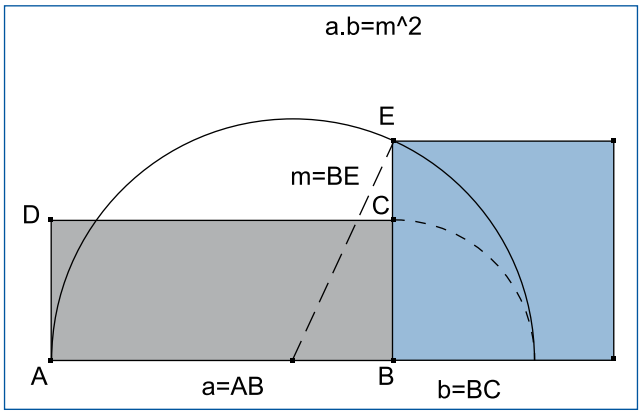
> "La cuadratura de una figura plana es la construcción con regla y compás de un cuadrado con la misma superficie de la figura plana original. Si la cuadratura de una figura plana puede ser llevada a cabo, se dice, que la figura es cuadrable"

No debe sorprender que el problema de la cuadratura interesara a los griegos. Desde un punto de vista puramente práctico, la determinación de la superficie de una figura de forma irregular no es, por supuesto, nada fácil. Si esta figura se puede sustituir por un cuadrado equivalente, entonces la determinación de la superficie de la figura original quedaría reducida al sencillo problema de encontrar el área de ese cuadrado.

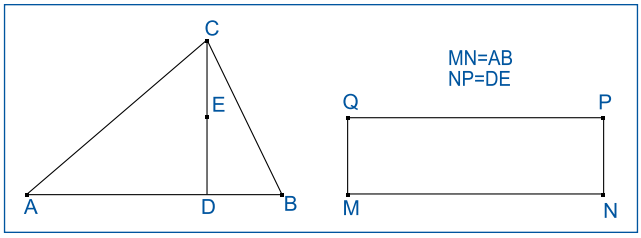
Indudablemente, la fascinación de los griegos por la cuadratura tenía un interés que excedía los aspectos prácticos. Pues, si se consigue, la cuadratura impondría la regularidad simétrica del cuadrado a la irregularidad asimétrica de una figura plana arbitraria. Para los que buscaban un mundo natural gobernado por la razón y el orden, interesaba mucho el proceso de sustituir lo asimétrico por lo simétrico, lo imperfecto por lo perfecto, lo irracional por lo racional. En este sentido, la cuadratura no sólo representaba el triunfo de la razón humana, sino también de la inherente simplicidad y belleza del universo humano.

El diseño de cuadraturas era, en consecuencia, un problema particularmente fascinante para los matemáticos griegos, quienes producían inteligente s construcciones geométricas con ese fin. Como, casi siempre, las soluciones pueden encontrarse por aproximaciones, cuadrando primero una figura razonablemente "fácil" y pasando de esa construcción a la cuadratura de otras más irregulares y extrañas.

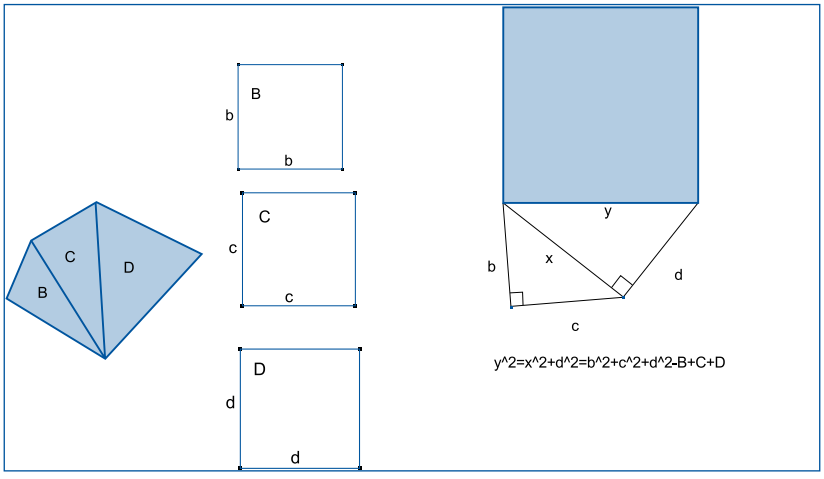
El paso inicial clave en este proceso es la cuadratura del rectángulo, procedimiento que aparece en la proposición 14 de los *Elementos de Euclides*, aunque seguramente era ya conocido bastante tiempo antes. Comenzamos con dicho procedimiento.



Paso 1
Cuadratura del rectángulo



Paso 2
Cuadratura del triángulo.

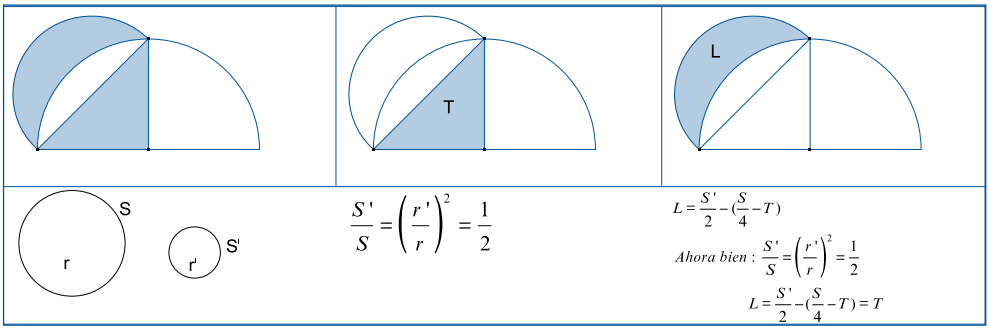


Paso 3
Cuadratura del polígono.

Con los términos descritos, los griegos podrían cuadrar los polígonos más irregulares. Pero este triunfo estaba amortiguado por el hecho de que estas figuras eran rectilíneas, es decir, sus lados, aunque numerosos y formando toda clase de extraños ángulos, eran simple líneas rectas. Mucho más dificultoso era el tema de si las figuras con lados curvados, las llamadas curvilíneas, eran también cuadrables. En principio, esto parecía improbable, ya que no existen medios obvios de rectificar una curva mediante regla y compás. Debió, por tanto, resultar totalmente sorprendente el que Hipócrates de Quíos consiguiera cuadrar una figura curvilínea conocida como una "lúnula" en el siglo V a. C.

2. LA CUADRATURA DE UNA LÚNULA

Vemos la equivalencia entre las siguientes regiones sombreadas:



3. LA DETERMINACIÓN DE ARQUÍMEDES DEL ÁREA DEL CÍRCULO

Arquímedes de Siracusa (287-212 a.C.) fue el más grande matemático de la antiguedad. De entre sus más famosos descubrimientos destaca la medida del círculo. La clave de este problema se encuentra en el cálculo del número π, esto es, el número por el que hay que multiplicar el diámetro y el cuadrado del radio para determinar la longitud de la circunferencia y el área del círculo, respectivamente. (A propósito del nombre de este número π, éste se debe a Euler que lo llama así en sus Commenterii Academiae Petropolitanae ad annum 1739, vol. IX)

Por el año 255 a.C, Arquímedes escribió un breve tratado titulado Medida de un círculo, cuya primera proposición daba ya un análisis penetrante del área circular. Antes de analizarla, examinaremos lo que se conocía acerca de las áreas circulares cuando Arquímedes apareció en escena.

Los geómetras de la época sabían que la razón de la circunferencia a su diámetro siempre es la misma. En términos modernos, diríamos que:

$\frac{L_1}{d_1}=\frac{L_2}{d_2}$ donde L es la longitud de la Circunferencia y d, su diámetro. Esta constante, no es otra que π. Pero, ¿qué ocurre con el área del círculo? Se conocía que

la razón del área de un círculo al cuadrado de su diámetro era una constante (Proposición XII.2 de los Elementos). Euclides había demostrado que existe una cierta constante k tal que $\frac{S}{d^2} = k$.

Ahora bien, ¿cómo se relacionan estas constantes entre sí?. Es decir, ¿se puede encontrar una relación sencilla entre la constante unidimensional π y la constante bidimensional k? Aparentemente, Euclides no había encontrado tal relación.

Pero en el breve tratado Medida de un círculo, Arquímedes demostró lo que hoy es la fórmula moderna del área de un círculo, que implica también al número π.

Uno de los resultados preliminares directos era el del área de un polígono regular.

"El área del polígono regular es s·a, donde s=semiperímetro y a=apotema."

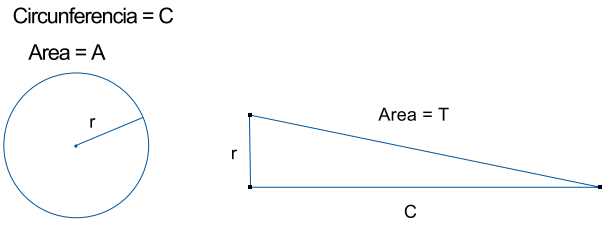
Otro resultado previo conocido sostenía que, en un círculo dado, es posible inscribir un cuadrado. El área del cuadrado, por supuesto, es menor que la del círculo en el que está inscrito. Si se divide por la mitad cada lado del cuadrado, se pueden localizar los vértices de un octógono regular inscrito en el mismo círculo. Por supuesto, el área del octógono se aproxima más a la del círculo que la del cuadrado. Si volvemos a dividir los lados del octógono para obtener un hexadecágono, el área de éste estará más cerca de la del círculo que la del octógono. El proceso se puede continuar indefinidamente. Ésta es, de hecho, la esencia del famoso método de exhaución de Eudoxo. En definitiva, este método permitía hacer afirmaciones del siguiente modo: Si se tiene un área preasignada, todo lo pequeña que se quiera, se puede construir un polígono regular inscrito para el que la diferencia entre el área del círculo y el área del polígono sea menor que esa cantidad preasignada.

Una regla análoga es válida para los polígonos circunscritos.

Con estos resultados, y con la genialidad de Arquímedes en el uso del razonamiento de la doble *reductio ad absordum* demuestra su proposición sobre la medida del círculo.

PROPOSICIÓN. El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo en el cual uno de los lados alrededor del ángulo recto es igual al radio y el otro a la circunferencia del círculo.

Dem.-



Caso 1: $A > T \Rightarrow$ Absurdo

Caso 2: $A < T \Rightarrow$ Absurdo

$\Rightarrow \quad A = T$

Arquímedes para demostrar la proposición anterior, tiene que desechar que A < T y que A > T y así solo sería posible que A=T.

Caso 1: A>T

Esto quiere decir A-T>0. Arquímedes sabía que dentro del círculo se podía inscribir un polígono regular cuya área difiriera de la del círculo en una cantidad positiva. Si llamamos I al área del polígono inscrito. A-I < A-T → T < I

Pero esto es absurdo, ya que T=½rC y el área de un polígono es I=½hP donde h es la apotema y P el perímetro del polígono. Entonces como el polígono está inscrito en la circunferencia, h<r y P<C.

Por tanto, llegamos a la desigualdad I < T, y así incurrimos en contradicción.

Caso 2: A<T

Supongamos ahora que A<T. Arquímedes sabía que fuera del círculo se podía circunscribir un polígono regular cuya área difiriera de la del círculo en una cantidad positiva. Si llamamos E al área del polígono circunscrito.

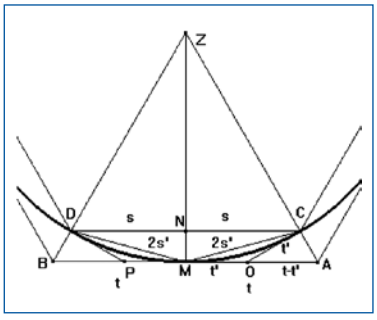
Si se circunscribe un polígono de área E, dicha área será mayor que A, área del círculo.

Entonces tendremos que: E-A < T-A → E < T

Pero en este polígono, su apotema h = r, mientras que su perímetro es mayor que la longitud de la Circunferencia, P>C. Luego entonces: E= ½hP > ½rC=T → E > T y así incurrimos en contradicción.

Luego queda demostrado que A=T.

4. DETERMINACIÓN POR ARQUÍMEDES DEL NÚMERO π.



El método de Arquímedes descansa en la siguiente idea. La circunferencia (su longitud) se mantiene entre los perímetros de los dos n-ágonos regulares, circunscrito e inscrito, respectivamente. El objetivo es, pues, calcular los perímetros de estos dos n-ágonos, con n tan grande de modo que aquellas diferencias se hagan tan pequeñas como se quiera e igual a una magnitud ε. De esta forma, tanto la longitud como el área de la circunferencia y círculo, respectivamente serán determinadas con la suficiente aproximación.

La particular aportación de Arquímedes se encuentra en su método, que permite calcular los perímetros de cualesquiera polígonos regulares de tantos lados n como se quiera. Este método, conocido como el algoritmo de Arquímedes, está basado en dos fórmulas de recurrencia.

Sea en la figura adjunta, Z el centro de la circunferencia, y AB= 2t el lado del polígono circunscrito y CD= 2s el lado del polígono inscrito, ambos de n lados. Sea M el punto medio de AB y N el punto medio de CD, sea O el punto de intersección de MA con la tangente al círculo por el punto C. Por tanto, OM=OC=t' será igual a la mitad del 2n-ágono regular circunscrito y MC=MD=2s' es el lado del polígono inscrito regular de 2n-lados.

Como ACO y AMZ son triángulos rectángulos semejantes, se tiene que:

t'/(t−t') = OC/OA=MZ/AZ , y, por otro lado s/ t= NC/ MA = CZ/ AZ,
Como CZ= MZ, se tendrá que: t'/(t−t')= s/ t → t'= st/ (s+t)

Y como los triángulos CMD y COM son isósceles y semejantes, $\frac{2s'}{2s} = \frac{t'}{2s'}$, o sea: $2^{s'2} = st'$.

Si a es el perímetro del n-ágono circunscrito y b el perímetro del inscrito, y a' y b' son los perímetros, respectivamente de los 2n-ágonos circunscrito e inscrito, entonces tendremos que:

$$a= 2nt;\ b= 2ns;\ a'= 4nt';\ b'= 4ns'.$$

Si entonces introducimos los valores obtenidos para t, s, t', s' en aquéllas ecuaciones, obtendremos las fórmulas de recurrencia de Arquímedes:

$$\text{(I)}\ \ a' = \frac{2ab}{a+b} \qquad \text{(II)}\ \ b' = \sqrt{b.a'}$$

Por lo que, a' es la media armónica de a y b; y b' es la media geométrica de b y a'.

Ahora si consideramos la sucesión de los n-ágonos, 2n-ágonos, 4n-ágonos, 8n-ágonos, etc., y designamos a los perímetros de los circunscritos e inscritos 2vn-ágonos como av y bv, respectivamente, obtendremos la serie de Arquímedes:

$$a_0,\ b_0,\ a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ldots$$

de los sucesivos perímetros. Aquí las fórmulas de recurrencia (I) y (II) serían:

$$\text{(I)}\ \ a_{v+1} = \frac{2a_v b_v}{a_v + b_v} \qquad \text{(II)}\ b_{v+1} = \sqrt{b_v.a_{v+1}}$$

Esto es, cada término de la serie de Arquímedes es alternativamente la media armónica y geométrica de los dos términos precedentes.

Usando esta regla, nosotros somos capaces de calcular todos los términos de la serie si son conocidos los dos primeros términos de ella. La elección que hace Arquímedes como el polígono inicial es el hexágono, cuyos perímetros son $a_0 = 4\sqrt{3}\ r$ y $b_0 = 6r$, respectivamente, y así trabajando con la serie, calculamos $a_1, b_1, a_2, b_2, a_3, b_3$, hasta a_4 y b_s , correspondientes al circunscrito e inscrito de 96 lados.

Si se recuerda que, exceptuando el hexágono, todos esos polígonos tienen sus lados inconmensurables con el diámetro, tales perímetros están expresados mediante raíces cuadradas, seguramente conocidas en su época, pero de las cuales nada dice Arquímedes. El hecho es que Arquímedes llegó a probar que nuestro número está entre ciertos valores obtenidos y que él sustituye por los más cómodos $3\frac{10}{70}$ d y $3\frac{10}{71}$ d

La aproximación de Arquímedes para el valor de π es consecuentemente $\pi = 3\frac{1}{7} = 3.14$

5. CÁLCULO DE π, UTILIZANDO EL PROGRAMA MATHEMATICA

```
f[x_, y_] := 2x*y/(x+y); g[x_, y_] := √(f[x, y]*y); h[x_, y_] := {f[x, y], g[x, y]};

N[h[4√3, 6]]

{6.430780618346945, 6.2116570824604995}

h[6.430780618346945, 6.2116570824604995]

{6.319319884195001, 6.265257226562477}

h[6.319319884195001, 6.265257226562477]

{6.29217243026287, 6.278700406093735}

h[6.29217243026287, 6.278700406093735]

{6.2854291992907365 , 6.28206390178102}

h[6.2854291992907365 , 6.28206390178102]

{6.2837460999596475 , 6.282904944570924}

h[6.2837460999596475 , 6.282904944570924]

{6.283325494113697 , 6.283115215823715}
```

En definitiva, $a_0 = 3\sqrt{b_0}=6$, $a_1 \approx 6.43078$, $b_1 \approx 6.21166$, …, $a_4 \approx 6.28543$, $b_4 \approx 6.28206$, …, lo cual ya da una aproximación de $\pi \approx 3.14$. Para los términos $a_6 \approx 6.28332$ y $b_6 \approx 6.28311$, obtendríamos una aproximación de $\pi \approx 3.141$.

6. DETERMINACIÓN DEL ÁREA DEL SEGMENTO DE UNA PARÁBOLA

En su tratado Sobre la Cuadratura de la Parábola, Arquímedes había dado ya una primera demostración mecánica de la cuadratura de la parábola (proposiciones 1-17) extraídos del tratado Sobre el Equilibrio de los Planos y previa a la

geométrica que presentaremos a continuación. «la equivalencia entre el segmento de parábola y los cuatro tercios del triángulo inscrito».

Se trata del primer ejemplo en la Historia de la Matemática de la cuadratura de una figura mixtilínea. Ya que el método mecánico de investigación de EL MÉTODO de Arquímedes apunta históricamente hacia los indivisibles e infinitesimales de las técnicas de cuadratura del siglo XVII que condujeron al descubrimiento del Cálculo Infinitesimal por Newton y Leibniz, mientras que el método demostrativo de exhausción apunta hacia las técnicas aritméticas de los límites que fundamentan el Análisis moderno en el siglo XIX, la conjunción de ambos métodos, uno heurístico y empírico y otro riguroso y apodíctico, sitúan a Arquímedes en las raíces históricas del Cálculo Integral. Por eso, como afirma E.Rufini (Il Metodo d'Archimede e le origine dell'analisi infinitesimale nell'antichità, p.187):

> «Arquímedes anticipa nuestro Cálculo Integral, tanto en el tiempo como en los procedimientos y en la genialidad de los artificios no superados por los precursores del siglo XVII.»

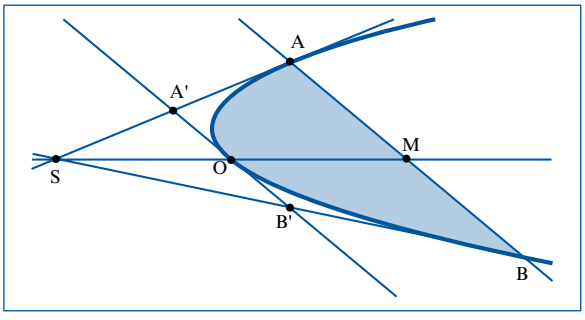
Pero más allá de la Matemática, la obra arquimediana, pródiga en asombrosos resultados y modelo de exposición rigurosa, al aplicar la Mecánica a la investigación de los teoremas, desarrolla una concepción matemático-experimental que está en la raíz de una tradición científica –llamada después Filosofía Natural y mucho más tarde Física Matemática–, que retomada por Leonardo, Galileo y Newton, establece las bases de la Revolución Científica del siglo XVII, y en particular constituye un sólido punto de partida tanto para la configuración de la nueva Física como para la invención del Cálculo Infinitesimal. Muy acertado es, pues, lo que escribe en el siglo XVII Montucla en su famosa Historia de las Matemáticas:

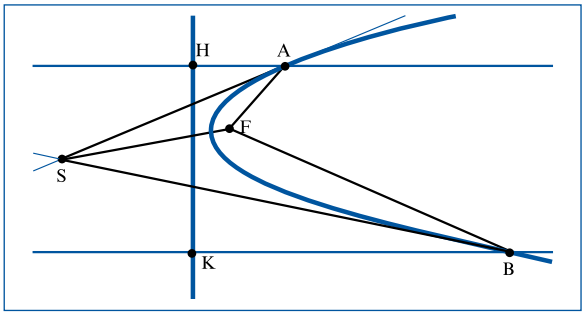
> «Arquímedes abrió nuevas vías en la Geometría e hizo tan gran número de descubrimientos, que la antigüedad le ha concedido de común acuerdo el primer lugar entre los geómetras».

7. CUADRATURA DEL SEGMENTO PARABÓLICO POR ARQUÍMEDES

TEOREMA.- El área encerrada por el segmento de una parábola es igual a 2/3 partes del área del correspondiente triángulo arquimediano.

Def.- Un triángulo arquimediano es aquel cuyos lados están formados por dos tangentes a la parábola y la cuerda que une los puntos de tangencia. A este último lado, lo llamaremos base de dicho triángulo. En el dibujo, será arquimediano el triángulo ABS. Para realizar dicha construcción, observamos que





desde los puntos A y B trazamos sendas paralelas al eje de la parábola, determinando sobre la directriz, los puntos H y K, respectivamente. Conectando estos puntos con el foco F de la parábola podemos ahora, pues, trazar las mediatrices de estos segmentos FH y FK, que serán las rectas tangentes en A y B. estas rectas se cortan en el punto S. De esta manera, construimos el triángulo arquimediano ASB.

Como SA y SB son dos mediatrices del triángulo FHK, resultará que el punto S será el circuncentro de dicho triángulo y así la paralela al eje por el punto S será la mediatriz del lado HK y también la paralela media del trapecio AHKB y pasará por M, punto medio de la cuerda AB. En definitiva, la mediana de la base de un triángulo arquimediano es paralela al eje de la parábola.

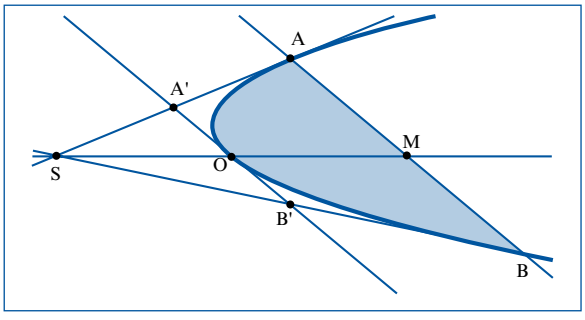
Trazamos ahora la tangente por O, el punto intersección de la parábola con la mediana SM. Esta última tangente corta en A' y B' a las tangentes primeras en A y B, respectivamente. Por tanto, los triángulos AA'O y BB'O son también arquimedianos. Por consecuencia, las medianas a las bases de estos últimos triángulos serán paralelas al eje y, por esto, paralelas a SO. Luego entonces son las paralelas medias de los triángulos AOS y BOS. En definitiva, pues, los puntos A' y B' son puntos medios de los segmentos AS y BS, respectivamente. Luego A'B' es paralela media del triángulo inicial ABS. Consecuentemente el punto O es el punto medio de SM.

Resumamos todo lo hecho en el enunciado siguiente:

Teorema de Arquímedes. La mediana correspondiente a la base de un triángulo arquimediano es paralela al eje, la paralela media a la base es tangente a la parábola y el punto de intersección de esta paralela media con la mediana es el punto de tangencia con la parábola.

Con estos resultados, vamos ahora a determinar el área J del segmento de parábola encerrada por nuestro triángulo arquimediano ASB con la base AB.

Las tangentes A'B' y las cuerdas OA y OB dividen el triángulo ASB en cuatro regiones:



El triángulo interno AOB inscrito en la parábola.

El triángulo A'SB' exterior a la parábola.

3 y 4. Dos triángulos residuales AOA' y BOB' que también son arquimedianos.

Como O es punto medio de SM, el valor del área del triángulo inscrito (1) es el doble que la del triángulo exterior (2).

Reiterando el proceso seguido, cada uno de los dos triángulos residuales darían lugar a dos triángulos, uno exterior y otro interior y a dos nuevos triángulos residuales. Por tanto, continuando con nuestro proceso llegaríamos a cubrir toda la región sombreada con los triángulos interiores con un valor de área el doble que los exteriores.

Si representamos por Δ el área del triángulo inicial ABS, entonces el área del correspondiente triángulo interior será igual a ½·Δ, y el del exterior será ¼·Δ y el de los dos residuales será igual a 1/8·Δ cada uno.

La serie de los sucesivos triángulos arquimedianos tienen como área los valores:

$$\Delta,\ 1/8\cdot\Delta,\ 1/8^2\cdot\Delta,\ 1/8^3\cdot\Delta,\ldots$$

La consiguiente serie de triángulos interiores se compondrá de forma en cuanto a sus valores numéricos igual a 1, 2, 4, 8, 16,… y en cuanto a valor de su área siempre la mitad del arquimediano correspondiente.

Estos dos hechos darán como resultado la suma de la siguiente serie numérica:

$$J = \frac{1}{2}.\left[\Delta + 2.\frac{\Delta}{8} + 4.\frac{\Delta}{8^2} + 8.\frac{\Delta}{8^3} + \ldots\right] = \frac{2.\Delta}{3}$$

NORMAS PARA LA PUBLICACIÓN

ENVÍO DE ARTÍCULOS

Los artículos enviados a la revista Epsilon pasan por un proceso de revisión por pares. Para enviar un artículo para su evaluación, siga las siguientes instrucciones:

1. Los trabajos deben ser de Educación Matemática. El artículo no debe haber sido publicado con anterioridad en una revista y los autores deben poseer los derechos de autor correspondientes.
2. Los artículos pueden ser: de investigación (experimental o un estudio teórico), de ideas para el aula, de experiencias. También se aceptan artículos para la sección de resolución de problemas.
3. Todo artículo debe estar escrito en castellano y debe incorporar referencias bibliográficas, en todo caso, deben seguir las normas del manual de publicación de la APA (quinta edición) de acuerdo con el siguiente modelo:

   Para artículo de revista: Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: tasks. Learning and teaching. *Review of Educational Research, 60*(1), 1-64.

   Para libro: Fernández, A. y Rico, L. (1992). *Prensa y educación Matemática*. Madrid: Síntesis.

   Para capítulo de libro, actas de congreso o similar: Fuson, K. (1992). Research on whole number addition and subtraction. En Grouws, D. (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 243-275. MacMillan Publishing Company: New York.

   Para artículo de revista electrónica o información en Internet: Cutillas, L. (2008). Estímulo del talento precoz en matemáticas. *Números* [en línea], 69. Recuperado el 15 de febrero de 2009, de http://www.sinewton.org/numeros/

4. El artículo deberá tener una extensión máxima de 7.000 palabras, incluyendo las tablas y los anexos si es de investigación. Para las secciones experiencias e ideas para el aula la extensión máxima será de 3.000 palabras. El formato de párrafo debe ser: letra Times New Roman tamaño 12 e interlineado sencillo y sin sangrado. Párrafos con espaciado anterior de 6 ptos. Los subtítulos deben estar sin numeración.
5. El artículo debe incluir en español e inglés: (a) el título del trabajo, (b) un resumen con un máximo de 100 palabras, y (c) de tres a seis términos claves.

6. El archivo con el artículo debe enviarse en formato doc y pdf.

7. Los esquemas, dibujos, gráficas e imágenes deben enviarse por separado (en una carpeta aparte del documento de texto) en formato TIFF o JPG con una resolución mínima de 300 puntos por pulgada. Cada archivo debe estar claramente identificado y se debe indicar en el texto el lugar donde se ubica. Las fotos en las que aparezcan menores deberán estas pixeladas o tener autorización escrita del tutor (se adjuntara copia con el archivo).

8. Se debe enviar una segunda versión del artículo en la que no aparezcan los nombres de los autores, ni información relativa a ellos o que pueda servir para indentificarlos (e.g., institución a la que pertenecen, citas y referencias bibliográficas propias, agradecimientos, datos del proyecto en el que se enmarca el trabajo). En esta versión, reemplace las citas y referencias bibliográficas por "Autor, 2008" o "Autor et al., 2008". En las referencias bibliográficas propias se debe eliminar el título y el nombre de la revista o el título del libro donde se publica.

9. Los datos de los autores (nombre, institución a la que pertenecen, dirección de correo electrónico, dirección postal y número de teléfono y fax) deben incluirse en un archivo aparte. Utilice únicamente un apellido o los dos pero separados por un guión.

10. Los autores deben ser los dueños de los derechos de autor del documento que se envía y, en su caso, haber obtenido los derechos para publicar aquel material de otros autores que se incluya en el documento.

11. Cuando el artículo tenga más de un autor, éstos designarán a un autor de contacto quien se encargará de toda la comunicación con la revista Epsilon.

12. Los archivos se deben enviar al centro de documentación Thales thales.matematicas@uca.es señalando si es un trabajo de investigación, experiencias o ideas para el aula.

13. Una vez aceptado el artículo para su publicación, se solicitará al autor de contacto que firme una carta de cesión de derechos de autor en nombre de todos los autores del trabajo.